Й. Кубилюс

ВЕРОЯТНОСТЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Й. Кубилюс

Вероятностные методы в теории чисел

Й.Кубилюс

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ВИЛЬНЮС 1962

Первое издание настоящей книги ввиду небольшого тиража быстро разошлось. По предложению Государственного издательства политической и научной литературы Литовской ССР автор решил подготовить второе издание.

За три года, протекшие со дня выхода в свет первого издания, вероятностная теория распределения значений аддитивных арифметических функций, изложенная в книге, получила дальнейшую разработку и пополнилась новыми результатами. Это учтено во втором издании, которое подверглось значительной переработке, однако рамки книги не позволили автору включить ряд важных результатов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание настоящей книги ввиду небольшого тиража быстро разошлось. По предложению Государственного издательства политической и научной литературы Литовской ССР автор решил подготовить второе издание.

За три года, протекшие со дня выхода в свет первого издания, вероятностная теория распределения значений аддитивных арифметических функций, изложенная в книге, получила дальнейшую разработку и пополнилась новыми результатами. Это учтено во втором издании, которое подверглось значительной переработке, однако рамки книги не позволили автору включить ряд важных результатов.

При подготовке рукописи к печати значительную помощь автору оказали Г. Мисявичюс и Л. Саулюс. Автор выражает им искреннюю благодарность.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Во всей работе, за исключением § 10, приняты следующие обозначения и определения.

m — целое положительное число;

n — большое целое положительное число;

s — фиксированное целое положительное число;

$(m_1, \ldots, m_s)$, $[m_1, \ldots, m_s]$ — наибольший общий делитель и наименьшее (положительное) общее кратное соответственно чисел $m_1, \ldots, m_s$;

$N_n\{\cdots\}$ — число всех целых положительных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые каждый раз будут указываться в скобках;

$\nu_n\{\cdots\} = \frac{1}{n} N_n\{\cdots\}$ — частота всех целых положительных чисел $m \leqslant n$, подчиненных условиям, которые будут написаны в скобках;

p, q — простые числа;

$\sum\limits_p$, $\sum\limits_{p^\alpha}$, $\prod\limits_p$, $\prod\limits_{p^\alpha}$ означают, что сумма или произведение берется по всем простым числам или соответственно по всем целым положительным степеням простых чисел;

$p^\alpha \| m$ означает, что $p^\alpha \mid m$, $p^{\alpha+1} \nmid m$;

$r = r(n)$ — некоторая функция от n, которая каждый раз определяется точнее;

$$\gamma_p = \left[\frac{\ln r}{\ln p}\right];$$

$$\pi(p^\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{p^\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right), & \text{если} \quad 0 \leqslant \alpha < \gamma_p, \\ \frac{1}{p^\alpha}, & \text{если} \quad \alpha = \gamma_p; \end{cases}$$

$$\rho(p^\alpha) = \frac{1}{p^\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right);$$

$\alpha_p(m)$ – целое неотрицательное число такое, что $p^{\alpha_p(m)} \| m$;

$$\beta_p(m) = \min\left(\alpha_p(m),\ \gamma_p\right);$$

$$\delta_p(m) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \mid m, \\ 0, & \text{если} \quad p \nmid m; \end{cases}$$

$$\eta_p(m) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{если} \quad p \mid m, \\ 1 - \frac{s}{p}, & \text{если} \quad p \nmid m; \end{cases}$$

$f(m),\ f_1(m),\ \ldots,\ f_s(m)$ – аддитивные арифметические функции;

$$f^{(p)}(m) = f\left(p^{\beta_p(m)}\right);$$

$$f(m)_u = \sum_{p \leqslant u} f^{(p)}(m);$$

$$A(u) = \sum_{p \leqslant u} \frac{f(p)}{p}, \quad A_k(u) = \sum_{p \leqslant u} \frac{f_k(p)}{p} \quad (k = 1,\ \ldots,\ s);$$

$$B(u) = \left(\sum_{p \leqslant u} \frac{|f^2(p)|}{p}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$B_k(u) = \left(\sum_{p \leqslant u} \frac{|f_k^2(p)|}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (k = 1,\ \ldots,\ s);$$

$$D(u) = \left(\sum_{p^\alpha \leqslant u} \frac{|f^2(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D_k(u) = \left(\sum_{p^\alpha \leqslant u} \frac{|f_k^2(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (k = 1,\ \ldots,\ s);$$

$\omega(m)$ — число различных простых делителей m;

$\Omega(m)$ — число всех простых делителей m, причем кратные делители считаются столько раз, какова их кратность;

$\omega_1(m)$ — число различных простых делителей m вида $4k+1$;

$\omega_2(m)$ — число различных простых делителей m вида $4k-1$;

$\tau_k(m)$ — число представлений m в виде произведения k множителей, причем порядок множителей учитывается;

$\tau(m)=\tau_2(m)$ — число делителей m;

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du;$$

$c, c_1, c_2, \ldots$ — абсолютные постоянные.

B — число, не всегда одно и то же, ограниченное по модулю константой. Эта константа абсолютная или зависит от параметров, которые каждый раз указываются. В доказательствах константа может зависеть от тех параметров, которые указаны в формулировках лемм или теорем.

Оценки при помощи символов O, o, $\sim$, $\asymp$ относятся в основном к n.

Под асимптотической плотностью множества целых положительных чисел E мы будем подразумевать предел $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n\{m\in E\}$ в случае его существования.

Остальные обозначения либо общеприняты, либо объясняются в тексте. Все отклонения от приведенных здесь обозначений каждый раз будут оговорены.

ВВЕДЕНИЕ

Давно замечено, что некоторые результаты теории чисел допускают вероятностное истолкование. Поэтому естественно возникла мысль привлечь методы теории вероятностей для решения арифметических задач. Аксиоматизация теории вероятностей предоставила права гражданства таким методам в теории чисел. В настоящее время уже имеется целый ряд результатов во всех основных разделах арифметики, строго доказанных путем теоретико-вероятностных соображений. Перенесение в теорию чисел идей и методов теории вероятностей позволяет по новому подойти к некоторым вопросам арифметики, снабжает теорию чисел новым арсеналом тонких методов исследования и приводит к новым, иногда весьма неожиданным, результатам.

В настоящее время еще трудно дать систематическое изложение различных приложений теории вероятностей к теории чисел. Мы ограничимся лишь одной областью таких применений — теорией распределения значений аддитивных и мультипликативных функций. Значения этих функций тесно связаны со свойствами распределения простых чисел в натуральном ряду. По поводу других применений теории вероятностей к арифметике мы отсылаем читателя к книге Ю. В. Линника [24], посвященной изложению глубоких результатов по бинарным аддитивным задачам, а также к книгам А. Г. Постникова [26], М. Каца [74] и обзорным статьям М. Каца [72], П. Эрдёша [60, 61], А. Реньи [85] и автора [19].

Последовательность вещественных или комплексных чисел $f(m)$ $\left(\text{соответственно } g(m)\right)$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ называется арифметической **аддитивной** (соответственно **мультипликативной**) функцией, если для любой пары взаимно простых $m_1,\ m_2$

$$f(m_1 m_2)=f(m_1)+f(m_2) \quad \left(g(m_1 m_2)=g(m_1)\, g(m_2)\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что $f(1)=0$ и, если $g(m)$ не равна тождественно нулю (только такие мультипликативные функции мы будем рассматривать в дальнейшем), $g(1)=1$. Далее, аддитивную и мультипликативную функцию, очевидно, можно представить в виде

$$f(m)=\prod_{p^\alpha \| m} f(p^\alpha)=\prod_p f(p^{\alpha_p(m)}),$$

$$g(m)=\prod_{p^\alpha \| m} g(p^\alpha)=\prod_p g(p^{\alpha_p(m)}).$$

Из этих „канонических“ представлений следует, что аддитивные и мультипликативные функции вполне определяются заданием их значений $f(p^\alpha)$, $g(p^\alpha)$ для целых положительных степеней простых чисел p^α. Если значения функций $f(m)$ и $g(m)$ совпадают для всех целых положительных степеней простых чисел, т. е. $f(p^\alpha)=f(p)$, $g(p^\alpha)=g(p)$ для всех p и всех $\alpha=2,\ 3,\ \ldots$, то их называют соответственно **сильно аддитивной** и **сильно мультипликативной**. Если же $f(m_1 m_2)=f(m_1)+f(m_2)$, $g(m_1 m_2)=g(m_1)\,g(m_2)$ для любых целых положительных m_1, m_2, не обязательно взаимно простых, то их называют соответственно **вполне аддитивной** и **вполне мультипликативной**. В этом случае $f(p^\alpha)=\alpha f(p)$, $g(p^\alpha)=g^\alpha(p)$ для всех простых p и $\alpha=2,\ 3,\ \ldots$

Понятие аддитивной и мультипликативной функции можно обобщить, определив их на любых мультипликативных полугруппах целых чисел или даже на мультипликативных полугруппах любой природы.

Аддитивностью или мультипликативностью, как известно, обладает большинство классических функций, рассматриваемых в теории чисел, причем многие классические задачи арифметики тесно связаны с их поведением. Поэтому изучение таких функций занимает значительное место в проблематике теории чисел.

Значения как аддитивных, так и мультипликативных функций распределены вообще весьма причудливо. Если проследить за изменением значений таких функций, когда аргумент пробегает целые положительные числа в натуральном порядке следования, то получится весьма хаотическая картина, которая обычно наблюдается при рассмотрении аддитивных свойств целых чисел совместно с мультипликативными. Все же оказывается, что в целом распределение значений многих из этих функций подчинено некоторым простым закономерностям, для формулировки и доказательства которых могут быть использованы идеи и методы теории вероятностей. При этом во многих случаях изучение распределения значений мультипликативных функций сводится к изучению аддитивных функций. Это имеет место, например, в случае, когда мультипликативная функция $g(m)$ всюду положительна, так как тогда главное значение логарифма $g(m)$ представляет собою вещественную аддитивную функцию. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать в основном только аддитивные арифметические функции.

В классических и более новых исследованиях при изучении распределения значений теоретико-числовых функций $f(m)$ арифметики обычно ограничивались рассмотрением суммы

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m),$$

представляющей собою среднее значение функции $f(m)$ на отрезке натурального ряда $\{1, \ldots, n\}$, и искали для нее ассимптотические приближенные выражения через возможно более простые функции от n. Однако, очевидно, значения функции $f(m)$ могут колебаться около среднего значения A_n в весьма широких пределах даже в случае сравнительно простых классических арифметических функций. Так, в случае функции $\omega(m)$ из простых расчетов следует, что

$$A_n \sim \ln\ln n,$$

в то время как

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \omega(m) = 1,$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\omega(m) \ln\ln m}{\ln m} = 1.$$

При этом оказывается, что очень большие или очень малые значения аддитивных функций встречаются вообще довольно редко. Поэтому естественно поставить вопрос о том, насколько значения этих функций отклоняются от среднего значения для подавляющего большинства значений аргумента.

Первый нетривиальный результат в этом направлении для интересующих нас функций принадлежит Харди и Рамануджану [69], доказавшим в 1917 г., что для любой положительной неограниченно возрастающей при $n \to \infty$ функции $\psi(n)$ частота

$$\nu_n \left\{ \left| \omega(m) - \ln\ln n \right| \leqslant \psi(n) \sqrt{\ln\ln n} \right\}$$

стремится к единице при $n \to \infty$. Иначе говоря, для „почти всех" целых положительных чисел $m \leqslant n$ значения функции $\omega(m)$ отклоняются от $\ln\ln n$ на величину, не превосходящую по абсолютному значению $\psi(n) \sqrt{\ln\ln n}$.

Доказательство этой теоремы, предложенное Харди и Рамануджаном, – арифметическое и довольно сложное. Оно основано на весьма точной оценке числа $N_n\{\omega(m) = k\}$ (k – целое положительное) сверху:

$$N_n \left\{ \omega(m) = k \right\} < \frac{c_1 n (\ln\ln n + c_2)^{k-1}}{(k-1)! \ln n}.$$

С другой стороны, теорема Харди и Рамануджана представляет собою аналог теоретико-вероятностного закона

Таким образом, функция $\omega(m)$ на множестве $\{1, \ldots, n\}$ распределена приблизительно по закону Пуассона с параметром $\ln\ln n$. Аналогичная формула доказана и для случая, когда k растет не слишком быстро вместе с n, именно, для всех $k < c_4 \ln\ln n$, где c_4 — постоянная < 2. Известные доказательства локальных теорем такого рода требуют довольно тонких арифметических рассуждений; они обычно выводятся либо из закона простых чисел, либо доказываются при помощи тех же средств, которые приводят к закону простых чисел.

В случае интегральных асимптотических законов ищутся асимптотические выражения для $\nu_n\{f(m) < x\}$, где x — любое вещественное число. Поскольку $\nu_n\{f(m) < x\}$ представляет собою функцию распределения в теоретико-вероятностном смысле, то естественно здесь рассматривать сходимость последовательности функций распределения $\nu_n\{f(m) < x\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при соответствующем „центрировании и нормировании" функции $f(m)$ к предельной функции распределения в каждой её точке непрерывности.

Весьма общие результаты принадлежат П. Эрдёшу и А. Винтнеру. П. Эрдёш [53[III]], обобщая ряд предыдущих результатов [37, 44, 53[I, II], 88], в 1937 г. доказал, что для любой вещественной аддитивной функции $f(m)$ сходимость рядов

$$\sum_p \frac{\|f(p)\|}{p}, \tag{1}$$

$$\sum_p \frac{\|f(p)\|^2}{p}, \tag{2}$$

где

$$\|f(p)\| = \begin{cases} f(p), & \text{если } |f(p)| \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } |f(p)| > 1, \end{cases}$$

является достаточным условием для сходимости функции распределения $\nu_n\{f(m) < x\}$ при $n \to \infty$ к предельной функции распределения. Это условие оказалось также и необходимым [64].

больших чисел. Поэтому естественно напрашивается мысль об использовании для ее доказательства соображений, аналогичных употребляемым в доказательстве закона больших чисел. Такое доказательство было найдено в 1934 г. П. Тураном [93]. Оно опирается на легко получаемую оценку

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\omega(m)-\ln\ln n\right)^2=Bn\ln\ln n,$$

которая влечет за собой оценку

$$\psi^2(n)\ln\ln n\cdot N_n\left\{\left|\omega(m)-\ln\ln n\right|>\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}=Bn\ln\ln n.$$

Отсюда следует теорема Харди и Рамануджана. Нетрудно усмотреть в доказательстве П. Турана аналог метода Чебышева для доказательства закона больших чисел.

П. Туран [94], пользуясь тем же приемом, обобщил эту теорему на более широкий класс функций: если сильно аддитивная арифметическая функция $f(m)$ для всех простых p удовлетворяет условию

$$0\leqslant f(p)<c_3$$

и $A(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, то

$$\nu_n\left\{\left|f(m)-A(n)\right|\leqslant\psi(n)\sqrt{A(n)}\right\}\to 1.$$

Желая более точно охарактеризовать распределение значений арифметических функций $f(m)$ на отрезке натурального ряда $\{1,\ldots,n\}$, мы естественным образом приходим к понятиям асимптотических локальных и интегральных законов распределения. В первом случае речь идет об асимптотическом выражении для числа целых положительных $m\leqslant n$, для которых $f(m)$ принимает заданное значение. Такие асимптотические формулы известны в настоящее время лишь для немногих конкретных арифметических функций. Так, для любого фиксированного целого положительного k из закона простых чисел сравнительно просто следует, что

$$\nu_n\left\{\omega(m)=k\right\}\sim\frac{(\ln\ln n)^{k-1}}{(k-1)!\,\ln n}.$$

Множество точек роста предельной функции распределения совпадает с замыканием множества значений функции $f(m)$. При этом, если ряд

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p}$$

сходится, то предельная функция распределения является дискретной, если же этот ряд расходится, то — непрерывной: абсолютно непрерывной или сингулярной. Все эти случаи действительно имеют место [56].

Если же ряд (1) расходится, в то время как ряд (2) сходится, то тогда [57] к предельной функции распределения сходится

$$\nu_n \left\{ f(m) - \sum_{p\leqslant n} \frac{\| f(p) \|}{p} < x \right\}.$$

Предельная функция распределения является непрерывной и строго возрастающей.

Эти результаты получены в основном при помощи элементарных методов. Гораздо больше трудностей представляет доказательство существования асимптотических интегральных законов для аддитивных функций с расходящимся рядом (2). Это имеет место, например, для функции $\omega(m)$. Здесь вообще не применимы те приемы, при помощи которых удается исследовать аддитивные функции в рассмотренных выше случаях. При наличии достаточно точных локальных теорем мы могли бы использовать их для решения этого вопроса. Так, из упомянутых выше асимптотических формул для $\omega(m)$ можно получить, что при $\left(1+o(1)\right)\ln\ln n < x < c_4 \ln\ln n$, $c_4 < 2$,

$$\nu_n \left\{ \omega(m) < x \right\} \sim \frac{1}{\ln n} \sum_{1\leqslant k<x} \frac{(\ln\ln n)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Отсюда, в частности, с помощью центральной предельной теоремы, примененной к сумме независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметром $\ln\ln n$, можно получить, что для всякого фиксированного x

$$\nu_n\left\{\frac{\omega(m)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}<x\right\}\sim\frac{1}{\ln n}\sum{}'\frac{(\ln\ln n)^{k-1}}{(k-1)!}\sim G(x). \qquad (3)$$

Здесь штрих у знака суммирования указывает, что суммируется по всем целым положительным $k<\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}$. Следовательно, значения функции $\omega(m)$ распределены асимптотически по нормальному закону.

Более простое доказательство асимптотического соотношения (3) для частного случая $x=0$, использующее вместо закона простых чисел метод эратосфенова решета, было предложено в 1936 г. П. Эрдёшом [55]. В 1947 г. В. Левек [77] тем же методом доказал справедливость (3) в общем случае, причем им получена еще некоторая оценка добавочного члена.

Арифметический метод П. Эрдёша и В. Левека основывается на специфических свойствах функции $\omega(m)$ и трудно поддается обобщению. Однако П. Эрдёш и М. Кац в 1939 г. [62, 63] путем привлечения центральной предельной теоремы теории вероятностей в сочетании с элементарными арифметическими методами типа эратосфенова решета получили следующую более общую теорему.

Если вещественная сильно аддитивная арифметическая функция $f(m)$ обладает свойствами: $B(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и $|f(p)|\leqslant 1$ для всех простых p, то

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}<x\right\}\to G(x)$$

при $n\to\infty$.

Наряду с изучением поведения аддитивной функции $f(m)$ представляет интерес изучение совместного распределения функций $f(m)$, $f(m+1)$. Первый результат в этом направлении принадлежит В. Левеку, который в 1947 г. [77] доказал, что для функции $f(m)$, удовлетворяющей условиям теоремы П. Эрдёша и М. Каца,

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}<x,\ \Bigg|\ \frac{f(m+1)-A(n)}{B(n)}<y\right\}\to G(x)\,G(y)$$

и отсюда вывел, что

$$\nu_n \left\{ \frac{\omega(m) - \omega(m+1)}{\sqrt{2 \ln \ln n}} < x \right\} \to G(x).$$

Соотношения последнего типа при $x=0$ рассматривались еще раньше П. Эрдёшем [54, 57] с помощью элементарных методов.

В 1954—1955 г. г. автору настоящей книжки удалось, исходя из аксиоматики А. Н. Колмогорова теории вероятностей, дать теоретико-вероятностную интерпретацию аддитивных функций, и таким образом вопросы распределения значений этих функций свести к соответствующим вопросам теории суммирования независимых случайных величин.

За последние годы вероятностной теорией распределения аддитивных функций занимались многие авторы: М. Б. Барбан, Э. Вилкас, Г. Делянж, П. Эрдёш, М. Кац, Й. Кубилюс, К. Прахар, А. Реньи, Г. Ригер, М. Танака, П. Туран, Р. Уждавинис, Х. Халберстам, Г. Шапиро. Разрабатывались методы этой теории, были обобщены и усилены предыдущие результаты в различных направлениях и получен ряд новых.

Теоремы, доказываемые в настоящей работе, включают в себя почти все основные известные результаты по вероятностной теории распределения аддитивных и мультипликативных функций. Некоторые из них публикуются здесь впервые.

В первых двух параграфах разрабатывается метод доказательства. Леммы первого параграфа составляют арифметическое ядро дальнейших рассуждений. Во втором параграфе изложена теоретико-вероятностная интерпретация аддитивных арифметических функций.

§ 3 содержит доказательство аналога закона больших чисел для любых аддитивных функций. В §§ 4—5 рассматриваются одномерные интегральные и локальные асимптотические законы для аддитивных функций и их сумм. Результаты §§ 1—2 в сочетании с известными предельными теоремами теории суммирования независимых случайных величин позволяют указать для довольно широкого класса аддитивных функций необходимые и достаточные условия существования асимптотических интегральных законов.

В § 6 оценивается быстрота сходимости законов распределения значений аддитивных функций на конечных отрезках натурального ряда к нормальному закону.

В § 7 доказываются некоторые аналоги известных предельных теорем о поведении в целом последовательности сумм независимых случайных величин.

В § 8 рассматриваются многомерные интегральные асимптотические законы.

§ 9 посвящен асимптотическому разложению законов распределения некоторого класса аддитивных арифметических функций и теоремам о больших уклонениях.

В § 10 рассматриваются аддитивные арифметические функции в поле гауссовых чисел.

В список литературы помимо цитируемых произведений включены все основные работы по вероятностной теории аддитивных арифметических функций.

1. ОСНОВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЛЕММЫ

Доказательства приводимых в дальнейшем предельных теорем для аддитивных арифметических функций состоят, как уже отмечалось в введении, из двух основных частей: арифметической и теоретико-вероятностной. Основу арифметической части составляют доказываемые ниже леммы 1.2 и 1.6.

В этом параграфе и в дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки сумм по простым числам. Хорошо известны следующие элементарные оценки:

$$\sum_{p \leqslant n} 1 = \frac{Bn}{\ln n}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} = B \ln n, \tag{1.2}$$

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \ln\ln n + c_5 + \frac{B}{\ln n}. \tag{1.3}$$

Во многих местах нам будут достаточны даже менее точные оценки.

Имеем, очевидно, что

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant 1 \\ \alpha > 1}} 1 = \sum_{p \leqslant \sqrt{n}} \sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\ln n}{\ln p}} 1 = B \sum_{p \leqslant \sqrt{n}} \ln n = B\sqrt{n} \ln n;$$

отсюда согласно (1.1) получаем:

$$\sum_{p^\alpha \leqslant n} 1 = \frac{Bn}{\ln n}. \tag{1.4}$$

Ряд

$$\sum_{p^\alpha,\ \alpha>1} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_p \frac{1}{p(p-1)}$$

сходится. Обозначим его сумму через c_6. Имеем оценки

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ \alpha>1}} \frac{1}{p^\alpha} \leqslant c_6, \tag{1.5}$$

$$c_6 - \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ \alpha>1}} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p \leqslant \sqrt{n}} \sum_{\alpha \geqslant \frac{\ln n}{\ln p}} \frac{1}{p^\alpha} + \sum_{p>\sqrt{n}} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} =$$

$$= B \sum_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{n} + B \sum_{p>\sqrt{n}} \frac{1}{p^2} = \frac{B}{\sqrt{n}} + B \sum_{m>\sqrt{n}} \frac{1}{m^2} = \frac{B}{\sqrt{n}}.$$

Из (1.3) заключаем:

$$\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{1}{p^\alpha} = \ln\ln n + c_7 + \frac{B}{\ln n}. \tag{1.6}$$

В силу (1.5)

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ \alpha>1}} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} \leqslant \ln n \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ \alpha>1}} \frac{1}{p^\alpha} = B \ln n.$$

Отсюда согласно (1.2)

$$\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} = B \ln n, \tag{1.7}$$

и для любого $l \geqslant 1$

$$\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{\ln^l p^\alpha}{p^\alpha} \leqslant (\ln n)^{l-1} \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} = B \ln^l n. \tag{1.8}$$

Лемма 1.1. *Пусть $r \geqslant 2$ и для всякого целого положительного m*

$$m_r = \prod_{p|m} p^{\beta_p(m)},$$

Тогда для любого целого положительного l

$$\sum_{m=1}^{n} \ln^l m_r \leqslant n\,(c_8\, l \ln r)^l.$$

Доказательство. Обозначим оцениваемую сумму через S. Имеем:

$$S=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{p\leqslant r}\beta_p(m)\,\ln p\right)^l=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{\substack{1\leqslant l_1\leqslant\ldots\leqslant l_k\\ l_1+\ldots+l_k=l}}\frac{l!}{l_1!\ldots l_k!}\sum_{p_1,\ldots,p_k}\beta_{p_1}^{l_1}(m)\ldots\beta_{p_k}^{l_k}(m)\ln^{l_1}p_1\ldots\ln^{l_k}p_k,$$

где последняя сумма представляет собою симметрическую функцию, общий член которой $\beta_{p_1}^{l_1}(m)\ldots\beta_{p_k}^{l_k}(m)\ln^{l_1}p_1\ldots\ln^{l_k}p_k$ и которую можно составить, когда $p_1,\ldots,p_k$ различны между собой и каждый из них пробегает простые числа, не превосходящие r. После обращения суммирования получим, что

$$S=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\substack{1\leqslant l_1\leqslant\ldots\leqslant l_k\\ l_1+\ldots+l_k=l}}\frac{l!}{l_1!\ldots l_k!}\sum_{p_1,\ldots,p_k}T(l_1,\ldots,l_k;\ p_1,\ldots,p_k)\times$$
$$\times\ln^{l_1}p_1\ldots\ln^{l_k}p_k, \tag{1.9}$$

где

$$T(l_1,\ldots,l_k;\ p_1,\ldots,p_k)=\sum_{m=1}^{n}\beta_{p_1}^{l_1}(m)\ldots\beta_{p_k}^{l_k}(m).$$

Слагаемые в последней сумме сгруппируем по значениям, которые могут принимать $\beta_p(m)$. Имеем:

$$T(l_1,\ldots,l_k;\ p_1,\ldots,p_k)=\sum_{\beta_1=1}^{\gamma_{p_1}}\ldots\sum_{\beta_k=1}^{\gamma_{p_k}}\beta_1^{l_1}\ldots\beta_k^{l_k}\sum_{\substack{m\leqslant n\\ \beta_{p_1}(m)=\beta_1\\ \cdots\cdots\\ \beta_{p_k}(m)=\beta_k}}1.$$

Число же целых положительных $m \leqslant n$, для которых $\beta_{p_1}(m) = \beta_1, \ldots, \beta_{p_k}(m) = \beta_k$, не превосходит числа всех $m \leqslant n$, делящихся на $p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$. Следовательно,

$$T(l_1, \ldots, l_k;\ p_1, \ldots, p_k) \leqslant n \sum_{\beta_1=1}^{\gamma_{p_1}} \ldots \sum_{\beta_k=1}^{\gamma_{p_k}} \frac{\beta_1^{l_1} \ldots \beta_k^{l_k}}{p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}}.$$

Подставляя эту оценку в (1.9) и применяя (1.8), получим, что

$$S \leqslant n \sum_{k=1}^{l} \sum_{\substack{1 \leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_k \\ l_1+\ldots+l_k=l}} \frac{l!}{l_1! \ldots l_k!} c_8^k \ln^l r \leqslant n (c_8 l \ln r)^l,$$

так как c_8 можно считать $\geqslant 1$.

Лемма 1.2. *В обозначениях леммы* 1.1 *при* $u \geqslant 2$

$$N_n \{ m_r \geqslant u \} \leqslant e n \exp\left\{ -c_9 \frac{\ln u}{\ln r} \right\}, \quad c_9 = \frac{1}{c_8 e}.$$

Доказательство. Имеем, очевидно, что

$$\sum_{m=1}^{n} \ln^l m_r \geqslant N_n \{ m_r \geqslant u \} \ln^l u,$$

где l — любое целое положительное число. Положим

$$l = \left[\frac{\ln u}{c_8 e \ln r} \right]$$

и рассмотрим случай $\ln u \geqslant c_8 e \ln r$. Тогда $l \geqslant 1$ и согласно лемме 1.1

$$N_n \{ m_r \geqslant u \} \leqslant n \left(\frac{c_8 l \ln r}{\ln u} \right)^l \leqslant e n \exp\left\{ -\frac{\ln u}{c_8 e \ln r} \right\}.$$

Если же $\ln u < c_8 e \ln r$, то лемма тривиальна, так как тогда

$$e \exp\left\{ -\frac{\ln u}{c_8 e \ln r} \right\} > 1.$$

Лемма 1.3. *Пусть Q — любое множество простых чисел, не превосходящих $r \geqslant 2$; D — множество всех целых положительных бесквадратных чисел, делящихся только на простые* *числа из* Q; $1 \in D$; $g(d)$ — *положительная мультипликативная функция, определенная на* D, *причем* $g(p) \leqslant \frac{c_{10}}{p}$, $p \in Q$. *Тогда для любого целого положительного* l

$$\sum_{d \in D} g(d) \ln^l d \leqslant (c_{11}\, l \ln r)^l \prod_{p \in Q} \Big(1 + g(p)\Big).$$

Доказательство. Обозначив оцениваемую сумму через U, заменим в ней

$$\ln d = \sum_{p \in Q} \delta_p(d) \ln p,$$

возведем последнюю сумму в степень l и, рассуждая точно так же, как и при доказательстве леммы 1.1, получим, что

$$U = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\substack{1 \leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_k \\ l_1 + \ldots + l_k = l}} \frac{l!}{l_1! \ldots l_k!} \sum_{p_1, \ldots, p_k} \ln^{l_1} p_1 \ldots \ln^{l_k} p_k \sum_{\substack{d \in D \\ d \equiv 0 \bmod p_1 \ldots p_k}} g(d),$$

где третья сумма берется по всем различным перестановкам $p_1, \ldots, p_k$, составленным из чисел $p_j \in Q$ ($j = 1, \ldots, k$). Легко видеть, что в силу мультипликативности $g(d)$

$$\sum_{\substack{d \in D \\ d \equiv 0 \bmod p_1 \ldots p_k}} g(d) = g(p_1 \ldots p_k) \sum_{\substack{d \in D \\ d \equiv 0 \bmod p_1 \ldots p_k}} g\left(\frac{d}{p_1 \ldots p_k}\right) =$$

$$= g(p_1 \ldots p_k) \prod_{p \in Q \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}} \Big(1 + g(p)\Big) = P \prod_{j=1}^{k} \frac{g(p_j)}{1 + g(p_j)},$$

где

$$P = \prod_{p \in Q} \Big(1 + g(p)\Big).$$

Из условий леммы следует, что

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{g(p_j)}{1 + g(p_j)} \leqslant \prod_{j=1}^{k} g(p_j) \leqslant \prod_{j=1}^{k} \frac{c_{10}}{p_j}.$$

Поэтому

$$U \leqslant P \sum_{k=1}^{l} \sum_{\substack{1 \leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_k \\ l_1+\ldots+l_k=l}} \frac{l!\, c_{10}^k}{l_1! \ldots l_k!} \sum_{p_1, \ldots, p_k} \frac{\ln^{l_1} p_1 \ldots \ln^{l_k} p_k}{p_1 \ldots p_k}.$$

Отсюда в силу оценки (1.8)

$$U \leqslant P \sum_{k=1}^{l} \sum_{\substack{1 \leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_k \\ l_1+\ldots+l_k=l}} \frac{l!\, c_{12}^k \ln^l r}{l_1! \ldots l_k!} \leqslant P (c_{11}\, l \ln r)^l.$$

Лемма 1.4. *Пусть* $r \geqslant 2$, $\ln r \leqslant c_{13} \ln n$, *где* c_{13} — *достаточно малая постоянная;* Q *и* D *имеют те же значения, как и в лемме* 1.3. *Пусть, далее,* $a(m)$ $(m=1, \ldots, n)$ — *целые числа, причём число всех* $a(m)$ $(m=1, \ldots, n)$, *делящихся на целое число* d *из* D, *равно* $n\vartheta(d)+R(d)$, *где* $\vartheta(d)$ — *мультипликативная функция, определенная на* D,

$$0 \leqslant \vartheta(d) < 1 \quad \textit{для} \quad d>1, \qquad |R(d)| \leqslant c_{14}\, d\, \vartheta(d),$$

$$\vartheta(p) \leqslant \frac{c_{15}}{c_{15}+p} \quad \textit{для} \quad p \in Q.$$

Тогда число чисел $a(m)$ $(m=1, \ldots, n)$, *не делящихся ни на одно простое число из* Q, *равно*

$$n \prod_{p \in Q} \left(1-\vartheta(p)\right) \cdot \left\{ 1 + B \exp\left(-c_{16} \frac{\ln n}{\ln r}\right) \right\}.$$

Лемму мы докажем при помощи решета А. Сельберга [89, 2]. Отметим, что она может быть получена методом В. Бруна [39, 83, 16, 21]. Более точные результаты дает метод А. А. Бухштаба [7, 8]. Для большинства наших теорем достаточны менее точные результаты по сравнению с доказываемыми здесь.

Доказательство. 1. Обозначим для краткости оцениваемое число через W. Пусть Q_1 — множество простых чисел, которое получаем из Q, отбрасывая простые числа p с условием $\vartheta(p)=0$, D_1 — множество всех целых положительных бесквадратных чисел, которые делятся только на простые числа множества Q_1, $1 \in D_1$. В дальнейшем d, d_1, d_2, δ означают числа из множества D_1. Предположим еще, что z — некоторое вещественное число, $\ln z > c_{17} \ln r$, где c_{17} — достаточно большое постоянное.

Введем вещественные числа $\lambda(d)$, которые подчиним пока единственному условию $\lambda(1)=1$. Имеем, что

$$W \leqslant \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{\substack{d \mid a(m) \\ d \leqslant z}} \lambda(d) \right)^2,$$

так как внутренняя сумма равна 1, если $a(m)$ не делится ни на одно $d>1$, т. е. ни на одно $p \in Q_1$, а в противном случае ее квадрат, очевидно, не отрицателен. Переставляя порядок суммирования, получим, что

$$W \leqslant \sum_{\substack{d_1 \leqslant z \\ d_2 \leqslant z}} \lambda(d_1) \lambda(d_2) \sum_{\substack{m \leqslant n \\ a(m) \equiv 0 \bmod d_1 \\ a(m) \equiv 0 \bmod d_2}} 1,$$

или согласно условиям леммы

$$W \leqslant n \sum_{\substack{d_1 \leqslant z \\ d_2 \leqslant z}} \lambda(d_1) \lambda(d_2)\, \vartheta\left([d_1, d_2] \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{d_1 \leqslant z \\ d_2 \leqslant z}} \lambda(d_1) \lambda(d_2)\, R\left([d_1, d_2] \right) = nU + V. \qquad (1.10)$$

Так как числа d_1, d_2 свободны от квадратов, то

$$\left(\frac{d_1}{(d_1, d_2)}, d_2 \right) = 1, \quad \left(\frac{d_1}{(d_1, d_2)}, (d_1, d_2) \right) = 1;$$

следовательно, в силу мультипликативности функции $\vartheta(d)$

$$\vartheta\left([d_1, d_2]\right) \vartheta\left((d_1, d_2)\right) = \vartheta\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right) \vartheta\left((d_1, d_2)\right) =$$

$$= \vartheta\left(\frac{d_1}{(d_1, d_2)}\right) \vartheta\left((d_1, d_2)\right) \vartheta(d_2) = \vartheta(d_1)\, \vartheta(d_2).$$

Поэтому

$$U = \sum_{\substack{d_1 \leqslant z \\ d_2 \leqslant z}} \frac{\vartheta(d_1)\, \vartheta(d_2)}{\vartheta\left((d_1, d_2)\right)} \lambda(d_1) \lambda(d_2).$$

Приведем теперь квадратичную форму U относительно $\lambda(d)$ к сумме квадратов. Для этого введем числа

$$h(d)=\sum_{\delta\mid d}\frac{\mu(\delta)}{\vartheta\left(\frac{d}{\delta}\right)}, \tag{1.11}$$

где $\mu(\delta)$ — функция Мёбиуса. Функция $h(d)$ является мультипликативной. Действительно, если $(d_1, d_2)=1$, то в силу мультипликативности $\mu(\delta)$ и $\vartheta(\delta)$

$$h(d_1 d_2)=\sum_{\delta\mid d_1 d_2}\frac{\mu(\delta)}{\vartheta\left(\frac{d_1 d_2}{\delta}\right)}=\sum_{\delta_1\mid d_1}\sum_{\delta_2\mid d_2}\frac{\mu(\delta_1\delta_2)}{\vartheta\left(\frac{d_1 d_2}{\delta_1\delta_2}\right)}=h(d_1)\,h(d_2).$$

Отсюда, так как

$$h(p)=\frac{1}{\vartheta(p)}-1, \tag{1.12}$$

имеем, что

$$h(d)=\prod_{p\mid d}h(p)=\prod_{p\mid d}\left(\frac{1}{\vartheta(p)}-1\right)=\frac{1}{\vartheta(d)}\prod_{p\mid d}\left(1-\vartheta(p)\right). \tag{1.13}$$

Согласно условию $\vartheta(p)<1$ из этой формулы получаем, что $h(d)>0$.

Из (1.11) по формуле обращения Мёбиуса следует, что

$$\frac{1}{\vartheta(d)}=\sum_{\delta\mid d}h(\delta).$$

Поэтому квадратичной форме U можно придать вид

$$U=\sum_{\substack{d_1\leqslant z\\ d_2\leqslant z}}\vartheta(d_1)\,\vartheta(d_2)\,\lambda(d_1)\,\lambda(d_2)\sum_{d\mid(d_1,d_2)}h(d)=\sum_{d\leqslant z}h(d)\,y_d^2,$$

где

$$y_d=\sum_{\substack{\delta\leqslant z\\ \delta\equiv 0 \bmod d}}\vartheta(\delta)\,\lambda(\delta). \tag{1.14}$$

При этом в силу известного свойства функции Мёбиуса

$$\sum_{d\mid\delta}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{если } \delta=1,\\ 0 & \text{для остальных } \delta\end{cases}$$

имеем, что

$$F=\sum_{d\leqslant z}\mu(d)\,y_d=\sum_{d\leqslant z}\mu(d)\sum_{\substack{\delta\leqslant z\\ \delta\equiv 0 \bmod d}}\vartheta(\delta)\,\lambda(\delta)=$$

$$=\sum_{\delta\leqslant z}\vartheta(\delta)\,\lambda(\delta)\sum_{d\mid\delta}\mu(d)=\vartheta(1)\,\lambda(1).$$

До сих пор мы предполагали, что $\lambda(d)$ — любые вещественные числа с единственным условием $\lambda(1)=1$, что равносильно условию $F=1$. Подберем теперь эти числа так, чтобы форма U была наименьшей. По правилам дифференциального исчисления мы должны решать уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial y_d}+w\,\frac{\partial F}{\partial y_d}=0,\quad d\leqslant z,$$

с множителем Лагранжа v и решение подставить в равенство $F=1$. Уравнения имеют вид

$$2h(d)\,y_d+w\,\mu(d)=0.$$

Отсюда

$$y_d=-\frac{w\,\mu(d)}{2h(d)}\,.$$

Равенство $F=1$ превращается в равенство

$$-\frac{w}{2}\sum_{d\leqslant z}\frac{1}{h(d)}=1,$$

и мы находим, что

$$w=-2Z,$$

где

$$Z=\left(\sum_{d\leqslant z}\frac{1}{h(d)}\right)^{-1}. \qquad (1.15)$$

Следовательно,

$$y_d=\frac{\mu(d)\,Z}{h(d)}\,. \qquad (1.16)$$

Для этих y_d форма U имеет значение

$$U=Z^2\sum_{d\leqslant z}\frac{1}{h(d)}=Z. \qquad (1.17)$$

Нам нет необходимости доказывать, что это значение U действительно является минимальным, так как (1.10) имеет место для любых $\lambda(d)$ с $\lambda(1)=1$, следовательно, для любых y_d с условием $F=1$.

Нам остается выразить $\lambda(d)$ через y_d. Имеем:

$$\vartheta(d)\lambda(d)=\sum_{\substack{\delta\leqslant z\\ \delta\equiv 0 \bmod d}}\vartheta(\delta)\lambda(\delta)\sum_{d_1\mid\frac{\delta}{d}}\mu(d_1)=$$

$$=\sum_{d_1\leqslant\frac{z}{d}}\mu(d_1)\sum_{\substack{\delta\leqslant z\\ \delta\equiv 0 \bmod d d_1}}\vartheta(\delta)\lambda(\delta)=$$

$$=\sum_{\substack{d_2\leqslant z\\ d_2\equiv 0 \bmod d}}\mu\left(\frac{d_2}{d}\right)\sum_{\substack{\delta\leqslant z\\ \delta\equiv 0 \bmod d_2}}\vartheta(\delta)\lambda(\delta)=$$

$$=\sum_{\substack{d_2\leqslant z\\ d_2\equiv 0 \bmod d}}\mu\left(\frac{d_2}{d}\right)y_{d_2}$$

в силу (1.13). Подставляя сюда (1.16), получаем, что

$$\lambda(d)=\frac{Z}{\vartheta(d)}\sum_{\substack{\delta\leqslant z\\ \delta\equiv 0 \bmod d}}\frac{\mu(\delta)\mu\left(\frac{\delta}{d}\right)}{h(\delta)}=$$

$$=\frac{\mu(d)Z}{\vartheta(d)h(d)}\sum_{\substack{\delta\leqslant z\\ \delta\equiv 0 \bmod d}}\frac{\mu^2\left(\frac{\delta}{d}\right)}{h\left(\frac{\delta}{d}\right)}=$$

$$=\frac{\mu(d)Z}{\vartheta(d)h(d)}\sum_{\delta\leqslant\frac{z}{d}}\frac{1}{h(\delta)}, \qquad (1.18)$$

так как $\left(d, \frac{\delta}{d}\right)=1$.

Оценим разность величин Z^{-1} и

$$P=\prod_{p\in Q_1}\left(1-\vartheta(p)\right)^{-1}=\prod_{p\in Q_1}\left(1+\frac{1}{h(p)}\right)=\sum_{d}\frac{1}{h(d)}.$$

Последние равенства справедливы ввиду (1.12) и мультипликативности $h(d)$. Таким образом,

$$\rho = P - Z^{-1} = \sum_{d > z} \frac{1}{h(d)} \leqslant \sum_{d} \frac{1}{h(d)} \left(\frac{\ln d}{\ln z} \right)^l,$$

где l — любое положительное число. Так как согласно (1.12) и условиям леммы

$$\frac{1}{h(p)} = \frac{\vartheta(p)}{1 - \vartheta(p)} \leqslant \frac{c_{15}}{p},$$

то в силу леммы 1.3 для любого целого положительного l

$$\rho \leqslant P \left(\frac{c_{18}\, l \ln r}{\ln z} \right)^l.$$

Подбирая

$$l = \left[\frac{\ln z}{c_{18}\, e \ln r} \right],$$

имеем, что $l \geqslant 1$ при $c_{17} \geqslant \frac{1}{c_{18}\, e}$ и

$$\rho \leqslant e P \exp \left(- \frac{\ln z}{c_{18}\, e \ln r} \right).$$

Таким образом,

$$Z = \prod_{p \in Q} \bigl(1 - \vartheta(p)\bigr) \cdot \left\{ 1 + B \exp \left(- c_{19} \frac{\ln z}{\ln r} \right) \right\}. \qquad (1.19)$$

Оценим теперь V. Согласно (1.18) и (1.15)

$$|\lambda(d)| \leqslant \frac{1}{\vartheta(d)\, h(d)}.$$

В силу (1.13), условий леммы и (1.3)

$$|\lambda(d)| \leqslant \prod_{p \mid d} \bigl(1 - \vartheta(p)\bigr)^{-1} \leqslant \prod_{p \mid d} \left(1 + \frac{c_{15}}{p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp \left\{ \sum_{p \leqslant d} \ln \left(1 + \frac{c_{15}}{p}\right) \right\} \leqslant \exp \left\{ c_{20} \sum_{p \leqslant d} \frac{1}{p} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp \{ c_{20} \ln \ln d + c_{21} \} = B \ln^{c_{20}} d.$$

Согласно (1.10)

$$V = B \ln^{c_{22}} z \sum_{\substack{d_1 \leqslant z \\ d_2 \leqslant z}} \left| R\Big([d_1, d_2] \Big) \right| .$$

Подставляя эту оценку, (1.19) и (1.17) в (1.10), находим, что

$$W \leqslant n \prod_{p \in Q} \Big(1 - \vartheta(p)\Big) \cdot \left\{ 1 + B \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln r} \right) \right\} +$$

$$+ B \ln^{c_{22}} z \sum_{\substack{d_1 \leqslant z \\ d_2 \leqslant z}} \left| R\Big([d_1, d_2] \Big) \right| . \qquad (1.20)$$

2. Оценим теперь W снизу. Пусть числа множества Q суть $p_1 < \ldots < p_k$. Очевидно, что числа $a(m)$ $(m = 1, \ldots, n)$, не делящиеся ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_k$, получим отбрасывая сначала те $a(m)$, которые делятся на p_1, затем те $a(m)$, которые делятся на p_2, но не делятся на p_1, далее те, которые делятся на p_3, но не делятся на p_1, p_2, и т. д. Таким образом,

$$W = n - \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{m \leqslant n \\ a(m) \equiv 0 \bmod p_j \\ (a(m),\, p_1 \ldots p_{j-1}) = 1}} 1. \qquad (1.21)$$

Внутренюю сумму оценим сверху с помощью (1.20), применяя эту формулу к числам $a(m)$, делящимся на p_j. В этом случае роль числа n играет $n_1 = n\vartheta(p_j) + R(p_j)$, роль множества Q – множество $\{p_1, \ldots, p_{j-1}\}$, в качестве r возьмем p_j. Число чисел $a(m)$, делящихся на p_j и на d, $(d, p_j) = 1$, равно

$$n\vartheta(dp_j) + R(dp_j) = \Big(n\vartheta(p_j) + R(p_j)\Big)\, \vartheta(d) +$$

$$+ R(dp_j) - \vartheta(d)\, R(p_j) = n_1 \vartheta(d) + R'(d),$$

где

$$R'(d) = R(dp_j) - \vartheta(d)\, R(p_j).$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{m\leqslant n\\ a(m)\equiv 0 \bmod p_j\\ (a(m),\, p_1\dots p_{j-1})=1}} 1\leqslant n_1 \prod_{\nu=1}^{j-1}\Big(1-\vartheta(p_\nu)\Big)\times$$

$$\times\left\{1+B\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln p_j}\right)\right\}+B\ln^{c_{22}} z \sum_{\substack{d_1\leqslant z\\ d_2\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\dots p_{j-1}}} \left|R'\Big([d_1, d_2]\Big)\right| =$$

$$=n\vartheta(p_j)\prod_{\nu=1}^{j-1}\Big(1-\vartheta(p_\nu)\Big)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln p_j}\right)\right\}+B\left|R(p_j)\right|+$$

$$+B\ln^{c_{22}} z\sum_{\substack{d_1\leqslant z\\ d_2\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\dots p_{j-1}}}\left\{\left|R\Big([d_1, d_2]\,p_j\Big)\right|+\left|R(p_j)\right|\right\}=$$

$$=n\vartheta(p_j)\prod_{\nu=1}^{j-1}\Big(1-\vartheta(p_\nu)\Big)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln p_j}\right)\right\}+$$

$$+B\ln^{c_{22}} z\sum_{\substack{d_1\leqslant z\\ d_2\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\dots p_{j-1}}}\left|R\Big([d_1, d_2]\,p_j\Big)\right|.$$

Подставляя эту оценку в (1.21), находим, что

$$W\geqslant n-n\sum_{j=1}^{k}\vartheta(p_j)\prod_{\nu=1}^{j-1}\Big(1-\vartheta(p_\nu)\Big)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln p_j}\right)\right\}+$$

$$+B\ln^{c_{22}} z\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{d_1\leqslant z\\ d_2\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\dots p_{j-1}}}\left|R\Big([d_1, d_2]\,p_j\Big)\right|.$$

Легко проверить тождество

$$1-\sum_{j=1}^{k}\vartheta(p_j)\prod_{\nu=1}^{j-1}\Big(1-\vartheta(p_\nu)\Big)=\prod_{p\in Q}\Big(1-\vartheta(p)\Big).$$

Таким образом,

$$W \geqslant n \prod_{p \in Q} \Big(1 - \vartheta(p)\Big) \cdot \Big(1 + BS\Big) + BT, \tag{1.22}$$

где

$$S = \sum_{j=1}^{k} \vartheta(p_j) \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln p_j}\right) \prod_{\nu=j}^{k} \Big(1 - \vartheta(p_\nu)\Big)^{-1},$$

$$T = \ln^{c_{23}} z \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{d_1 \leqslant z \\ d_2 \leqslant z \\ [d_1, d_2] \mid p_1 \ldots p_{j-1}}} \Big| R\Big([d_1, d_2]\, p_j\Big)\Big| .$$

Оценим сначала S. В силу свойств функции $\vartheta(p)$

$$S \leqslant c_{15} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln p_j}\right) \prod_{\nu=j}^{k} \left(1 + \frac{c_{15}}{p_\nu}\right) =$$

$$= B \sum_{p \leqslant r} \frac{1}{p} \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln p}\right) \prod_{p \leqslant q \leqslant r} \left(1 + \frac{c_{15}}{q}\right).$$

Согласно (1.3)

$$\prod_{p \leqslant q \leqslant r} \left(1 + \frac{c_{15}}{q}\right) = \exp\left\{ \sum_{p \leqslant q \leqslant r} \ln\left(1 + \frac{c_{15}}{q}\right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(c_{23} \sum_{p \leqslant q \leqslant r} \frac{1}{q}\right) = \exp\left(c_{23} \ln \frac{\ln r}{\ln p} + B\right) = B \left(\frac{\ln r}{\ln p}\right)^{c_{23}} .$$

Следовательно,

$$S = B \sum_{p \leqslant r} \frac{1}{p} \left(\frac{\ln r}{\ln p}\right)^{c_{23}} \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln p}\right).$$

Пусть

$$\psi(u) = \frac{1}{u} (\ln u)^{-c_{23}} \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln u}\right).$$

Используя частичное суммирование, имеем, что

$$S = B \ln^{c_{23}} r \left\{ \psi(r) \sum_{p \leqslant r} 1 - \int_2^r \psi'(u) \sum_{p \leqslant u} 1 \, du \right\}.$$

Так как

$$\psi'(u) = -\left(1 + \frac{c_{23}}{\ln u} - \frac{c_{19}\ln z}{\ln^2 u}\right)\frac{1}{u^2}(\ln u)^{-c_{23}}\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln u}\right),$$

то согласно (1.1)

$$S = B\ln^{c_{23}} r\left\{\frac{r\psi(r)}{\ln r} + \int_2^r \frac{u}{\ln u}\,\frac{1}{u^2}(\ln u)^{-c_{23}}\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln u}\right)du\right\} =$$

$$= \frac{B}{\ln r}\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln r}\right) + B\ln^{c_{23}} r\int_2^r \frac{1}{u(\ln u)^{c_{23}+1}}\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln u}\right)du.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных $v = \frac{\ln z}{\ln u}$. Получим:

$$S = B\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln r}\right) + B\left(\frac{\ln r}{\ln z}\right)^{c_{23}}\int_{\frac{\ln z}{\ln r}}^{\frac{\ln z}{\ln 2}} e^{-c_{19}v}\,v^{c_{23}-1}\,dv.$$

При $v \geqslant \frac{1+c_{23}}{c_{19}}$ функция $e^{-c_{19}v}\,v^{c_{23}+1}$ убывает, поэтому при достаточно большом c_{17}

$$S = B\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln r}\right) + B\left(\frac{\ln r}{\ln z}\right)^{c_{23}}\left(\frac{\ln z}{\ln r}\right)^{c_{23}+1}\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln r}\right)\times$$

$$\times\int_{\frac{\ln z}{\ln r}}^{\infty}\frac{dv}{v^2} = B\exp\left(-c_{19}\frac{\ln z}{\ln r}\right). \qquad (1.23)$$

Для T нам достаточна грубая оценка

$$T \leqslant z^2 r\ln^{c_{22}} z\sum_{d\leqslant z^3}|R(d)| = Bz^2 r\ln^{c_{22}} z\sum_{d\leqslant z^3} d\,\vartheta(d) =$$

$$= Bz^2 r\ln^{c_{22}} z\sum_{d\leqslant z^3} d = Bz^8 r\ln^{c_{22}} z = Bz^{c_{24}}.$$

Подставляя оценку для T и оценку (1.23) для S в (1.22), получим, что

$$W \geqslant n \prod_{p \in Q} \left(1 - \vartheta(p)\right) \cdot \left\{ 1 + B \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln r}\right) \right\} + Bz^{c_{24}}.$$

Оценив грубо второй член в (1.20), будем иметь, что

$$W \leqslant n \prod_{p \in Q} \left(1 - \vartheta(p)\right) \cdot \left\{ 1 + B \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln r}\right) \right\} + Bz^{c_{25}}.$$

Сравнивая эти две оценки, найдем:

$$W = n \prod_{p} \left(1 - \vartheta(p)\right) \cdot \left\{ 1 + B \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln r}\right) \right\} + Bz^{c_{26}}.$$

Наконец, в силу (1.3)

$$\prod_{p \in Q} \left(1 - \vartheta(p)\right)^{-1} \leqslant \prod_{p \in Q} \left(1 + \frac{c_{15}}{p}\right) = \exp\left\{ \sum_{p \leqslant r} \ln\left(1 + \frac{c_{15}}{p}\right) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(c_{27} \sum_{p \leqslant r} \frac{1}{p}\right) = \exp\left(c_{27} \ln\ln r + B\right) = B \ln^{c_{27}} r.$$

Поэтому

$$W = n \prod_{p \in Q} \left(1 - \vartheta(p)\right) \cdot \left\{ 1 + B \exp\left(-c_{19} \frac{\ln z}{\ln r}\right) + Bn^{-1} z^{c_{28}} \right\}.$$

Подбирая $z = n^{c_{29}}$, где c_{29} — достаточно малая положительная постоянная, получим при достаточно малом c_{13} лемму.

Лемма 1.5. *Пусть $M_1, \ldots, M_s, m_1, \ldots, m_s$ — целые положительные числа, причем $M_k m_k$ $(k = 1, \ldots, s)$ попарно взаимно просты, $M = M_1 \ldots M_s m_1 \ldots m_s$; $a_1, \ldots, a_s$ — целые числа. Обозначим через A целое число, удовлетворяющее условию*

$$A \equiv \sum_{k=1}^{s} \frac{M}{M_k m_k} M'_k a_k \mod M, \tag{1.24}$$

где числа M'_k $(k = 1, \ldots, s)$ определяются из сравнений

$$\frac{M}{M_k m_k} M'_k \equiv 1 \mod M_k m_k. \tag{1.25}$$

Пусть, далее,

$$\lambda_k(m)=\frac{M}{m_k}m+\frac{A-a_k}{m_k}\qquad (k=1,\ \ldots,\ s).$$

1°. *Если* $p\nmid M$, *то каждому сравнению* $\lambda_k(m)\equiv 0 \bmod p$ $(k=1,\ \ldots,\ s)$ *удовлетворяет один и только один класс вычетов по модулю* p, *причем два сравнения* $\lambda_k(m)\equiv 0 \bmod p$ *и* $\lambda_l(m)\equiv 0 \bmod p$ *имеют общее решение тогда и только тогда, когда* $p\mid a_k-a_l$.

2°. *Если* $p\mid M$, *в частности,* $p\mid M_k m_k$, *то сравнению* $\lambda_k(m)\equiv 0 \bmod p$ *удовлетворяет ровно один класс вычетов по модулю* p, *если* $p\nmid M_k$, *и* $\lambda_k(m)\equiv 0 \bmod p$ *для всех* m, *если* $p\mid M_k$; *при* $l\neq k$ $\lambda_l(m)\equiv 0 \bmod p$ *для всех* m, *если* $p\mid a_k-a_l$, *и* $\lambda_l(m)\not\equiv 0 \bmod p$ *для всех* m, *если* $p\nmid a_k-a_l$.

Доказательство. 1°. Пусть $p\nmid M$. Тогда, очевидно, $p\nmid\frac{M}{m_k}$. Следовательно, сравнение $\lambda_k(m)\equiv 0 \bmod p$ разрешимо и ему удовлетворяет один класс вычетов $\bmod p$.

Предположим, что два сравнения

$$\lambda_k(m)\equiv 0 \bmod p \quad\text{и}\quad \lambda_l(m)\equiv 0 \bmod p \tag{1.26}$$

имеют общее решение m_0. Тогда

$$\frac{M}{m_k}m_0+\frac{A-a_k}{m_k}\equiv 0 \bmod p,\quad \frac{M}{m_l}m_0+\frac{A-a_l}{m_l}\equiv 0 \bmod p.$$

Помножим первое сравнение на m_k, а второе на m_l и вычтем одно из другого. Получим, что $a_k-a_l\equiv 0 \bmod p$.

Пусть теперь, наоборот, $a_k\equiv a_l \bmod p$. Тогда, очевидно, сравнения

$$Mm+A-a_k\equiv 0 \bmod p \quad\text{и}\quad Mm+A-a_l\equiv 0 \bmod p$$

эквивалентны. Так как $p\nmid M$, то эти сравнения эквивалентны сравнениям (1.26).

2°. Пусть $p\mid M$. Предположим, что $p\mid M_k m_k$. Тогда $p\,\Big|\,\frac{M}{m_l}$ $(l=1,\ \ldots,\ s)$, если $p\mid M_k$. Если же $p\nmid M_k$, то $p\nmid\frac{M}{m_k}$ и $p\,\Big|\,\frac{M}{m_l}$ $(l=1,\ \ldots,\ s;\ l\neq k)$. Далее,

$$A-a_l\equiv\frac{M}{M_k m_k}M_k' a_k-a_l \bmod p,$$

или в силу (1.25)

$$A-a_k \equiv a_k - a_l \bmod p.$$

Эти замечания доказывают вторую часть леммы.

Лемма 1.6. *Пусть* $a_1, \ldots, a_s$ — *целые, различные между собою числа;* $r=r(n)$ — *функция от* n, *подчиненная условиям* $r \geqslant 2$, $\ln r < c_{13} \ln n$, *где* c_{13} — *достаточно малая постоянная;* $M_1, \ldots, M_s$, $m_1, \ldots, m_s$ — *целые положительные числа,* $M_k m_k$ $(k=1, \ldots, s)$ *попарно взаимно просты, причем* $M_1 \ldots M_s m_1 \ldots m < \sqrt{n}$; Q — *любое множество простых чисел, не превосходящих* r, *отличных от* s *и от простых делителей* $a_k - a_l$ $(k, l=1, \ldots, s;\ k \neq l)$. *Тогда число целых положительных чисел* $m \leqslant n$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{cases} m \equiv a_k \bmod M_k m_k & (k=1, \ldots, s), \\ m \not\equiv a_k \bmod m_k p & (k=1, \ldots, s;\ p \in Q,\ p \nmid M_k), \end{cases}$$

равно

$$\frac{n}{M_1 \ldots M_s\, m_1 \ldots m_s} \prod_{p \in Q} \left(1-\vartheta(p)\right) \cdot \left(1+Be^{-c_{10}\frac{\ln n}{\ln r}}\right),$$

где

$$\vartheta(p) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad p \mid M_1 \ldots M_s, \\ \dfrac{1}{p}, & \text{если} \quad p \nmid M_1 \ldots M_s,\ p \mid m_1 \ldots m_s, \\ \dfrac{s}{p}, & \text{если} \quad p \nmid M_1 \ldots M_s\, m_1 \ldots m_s, \end{cases}$$

причем оценка равномерна относительно Q, a_k, M_k, m_k $(k=1, \ldots, s)$ *с* $M_1 \ldots M_s\, m_1 \ldots m_s < \sqrt{n}$.

Доказательство. Обозначим оцениваемое число через N. Пусть Q_1 — множество простых чисел, которое получается из Q путем отбрасывания тех простых чисел p, которые делят $M_1 \ldots M_s$. Множество чисел m, удовлетворяющих системе сравнений

$$m \equiv a_k \bmod M_k m_k \quad (k=1, \ldots, s), \tag{1.27}$$

совпадает, как известно из теории сравнений, с множеством чисел m, удовлетворяющих сравнению

$$m \equiv A \bmod M, \quad \text{где} \quad M = M_1 \ldots M_s\, m_1 \ldots m_s,$$

а A определяется условием (1.24), причем можно, очевидно, считать, что $|A| \leqslant \frac{1}{2} M$. Числа $m \leqslant n$, удовлетворяющие системе (1.27), имеют вид

$$m = A + LM, \quad L = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-A}{M}\right] = n_1.$$

Тогда число N чисел m, о которых идет речь в формулировке леммы, согласно лемме 1.5 равно числу чисел $L = 1, \ldots, n_1$, удовлетворяющих условию

$$\prod_{k=1}^{s} \lambda_k(L) \not\equiv 0 \mod p \quad \text{для всех} \quad p \in Q_1.$$

Рассмотрим сравнение

$$\prod_{k=1}^{s} \lambda_k(L) \equiv 0 \mod d$$

для всех d, не делящихся на простые числа множества $Q \setminus Q_1$. Пусть $\sigma(d)$ – число классов вычетов $\mathrm{mod}\, d$, удовлетворяющих этому сравнению. Как известно из теории сравнений, $\sigma(d)$ является мультипликативной функцией, причем в силу леммы 1.5

$$\sigma(p) = \begin{cases} s, & \text{если} \quad p \nmid m_1 \ldots m_s, \\ 1, & \text{если} \quad p \mid m_1 \ldots m_s. \end{cases}$$

Согласно лемме 1.4

$$N = n_1 \prod_{p \in Q_1} \left(1 - \frac{\sigma(p)}{p}\right) \cdot \left(1 + Be^{-c_{31}\frac{\ln n}{\ln r}}\right) =$$

$$= \frac{n}{M} \left(1 + \frac{B}{\sqrt{n}}\right) \prod_{p \in Q} \left(1 - \vartheta(p)\right) \cdot \left(1 + Be^{-c_{31}\frac{\ln n}{\ln r}}\right) =$$

$$= \frac{n}{M} \prod_{p \in Q} \left(1 - \vartheta(p)\right) \cdot \left(1 + Be^{-c_{31}\frac{\ln n}{\ln r}}\right).$$

Лемма доказана.

В формулировке леммы предполагалось, что $M_k m_k$ $(k = 1, \ldots, s)$ попарно взаимно просты и в множество Q

не входят простые делители $a_k - a_l$ (k, $l=1, \ldots, s$; $k \neq l$) и число s, если, конечно, оно является простым. От этих условий легко освободиться. Небольшое усложнение доказательства леммы 1.6 приводит к следующей лемме.

Лемма 1.7. *Пусть* $a_1, \ldots, a_s$ — *целые числа*, $r = r(n)$ — *функция от* n, *подчиненная условиям* $r \geqslant 2$, $\ln r(n) < c_{13} \ln n$, *где* c_{13} — *достаточно малая постоянная*; $M_1, \ldots, M_s$, $m_1, \ldots, m_s$ — *целые положительные числа*, M — *общее наименьшее кратное чисел* $M_1 m_1, \ldots, M_s m_s$; $M < \sqrt{n}$; Q — *любое множество простых чисел, не превосходящих* r; Q_1 — *множество простых чисел, отличных от* s *и от простых делителей* $a_k - a_l$ (k, $l=1, \ldots, s$; $k \neq l$). *Тогда число целых положительных* $m \leqslant n$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{cases} m \equiv a_k \bmod M_k m_k & (k=1, \ldots, s), \\ m \not\equiv a_k \bmod m_k p & (k=1, \ldots, s;\ p \in Q,\ p \nmid M_k), \end{cases}$$

равно 0, *если не выполнено хотя бы одно из условий*

$$(M_k m_k,\ M_l m_l) \mid a_k - a_l \quad (k,\ l=1, \ldots, s;\ k \neq l),$$

или

$$\frac{n}{M} \prod_{p \in Q \cap Q_1} \left(1 - \vartheta(p)\right) \cdot \left\{ \prod_{p \in Q \setminus Q_1} \sum_E (-1)^{|E|} \varkappa_E(p)\, p^{\zeta_E(p)} + \right.$$

$$\left. + B\, 2^{s\,|Q \setminus Q_1|}\, e^{-c_{32} \frac{\ln n}{\ln r}} \right\}$$

в противном случае, причем оценка равномерна по Q, Q_1, M_k, m_k, a_k ($k=1, \ldots, s$) *с* $M < \sqrt{n}$. *Суммирование ведется по всем подмножествам* E *множества, полученного из* $\{1, \ldots, s\}$ *путем удаления тех чисел* k, *для которых* $p \mid M_k$; $|K|$ — *число элементов множества* K. *Величины* $\vartheta(p)$ *определяются также, как и в формулировке леммы* 1.6,

$$\beta_E^{(k)}(p) = \begin{cases} \alpha_p(M_k m_k) + 1, & \text{если} \quad k \in E, \\ \alpha_p(M_k m_k), & \text{если} \quad k \notin E, \end{cases}$$

$$\varkappa_E(p)=\begin{cases} 1, \text{ если } \min\left(\beta_E^{(k)}(p),\ \beta_E^{(l)}(p)\right) \leqslant \alpha_p(a_k-a_l) \text{ для всех} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k,\ l=1,\ \ldots,\ s;\ k\neq l, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$\zeta_E(p)=\max_{1\leqslant k\leqslant s}\alpha_p(M_k m_k)-\max_{1\leqslant k\leqslant s}\beta_E^{(k)}(p).$$

Для $p\in Q_1$

$$\sum_E(-1)^{|E|}\varkappa_E(p)\,p^{\zeta_E(p)}$$

совпадает с $1-\vartheta(p)$.

Доказательство мы не будем проводить. Отметим только, что и эту лемму можно усилить.

2. АДДИТИВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Вторую основную часть доказательств изложенных в дальнейшем теорем составляет применение предельных теорем для сумм случайных величин. Связать задачу изучения распределения значений аддитивных арифметических функций с теорией суммирования случайных величин можно различными способами. Мы изложим в общих чертах некоторые из них, причем ограничимся лишь простейшим случаем одномерных распределений.

Пусть дана любая последовательность серий вещественных чисел

$$h_n(1),\ h_n(2),\ \ldots,\ h_{k_n}(n) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.1}$$

Тогда

$$\frac{1}{k_n} N_{k_n}\{h_n(m)<x\}=\nu_{k_n}\{h_n(m)<x\}=F_n(x) \tag{2.2}$$

представляет собою функцию распределения. Нас будет интересовать предельное поведение последовательности функций распределения $\{F_n(x)\}$ в смысле сходимости в основном. К решению этого вопроса можно подойти с помощью теории преобразований Фурье. Имеем, очевидно, что характеристическая функция для $F_n(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_n(x)=\frac{1}{k_n}\sum_{m=1}^{k_n} e^{ith_n(m)}.$$

Известные свойства функций распределения и характеристических функций приводят к следующему критерию:

Для того, чтобы функции распределения (2.2) для последовательности (2.1) сходились к некоторой предельной функции распределения $F(x)$ в каждой её точке непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы сумма

$$\frac{1}{k_n} \sum_{m=1}^{k_n} e^{ith_n(m)} \tag{2.3}$$

сходилась для всех вещественных t к некоторой функции $\varphi(t)$, непрерывной в точке $t=0$. Функция $\varphi(t)$ тогда является характеристической функцией закона $F(x)$ и (2.3) сходится к $\varphi(t)$ равномерно в каждом конечном интервале значений t.

Таким образом, вопрос о существовании предельной функции распределения для (2.1) сводится к изучению тригонометрических сумм вида (2.3). В интересующем нас случае аддитивных арифметических функций суммы такого вида могут быть изучены, как будет видно в дальнейшем, посредством методов § 1 и известных предельных теорем для сумм случайных величин. Более того, можно показать, что при соответствующей интерпретации аддитивные арифметические функции ведут себя как суммы некоторых сравнительно простых случайных величин. При этом оказывается, что предпочтительнее выяснить теоретико-вероятностную природу распределения значений таких функций и вопрос об их асимптотическом распределении свести к известным предельным теоремам теории вероятностей.

Приведем несколько вариантов такой интерпретации. Впрочем, все они опираются на те же самые идеи. Всюду в дальнейшем $f(m)$ означает аддитивную арифметическую функцию.

Первый вариант. Исходя из аксиоматики А. Н. Колмогорова теории вероятностей [12], подберем в качестве поля элементарных событий конечный отрезок натурального ряда $E=\{1, 2, \ldots, n\}$, а в качестве множества случайных событий $\mathfrak{F}$ — систему всех подмножеств множества E и определим вероятностную меру для всех $A \in \mathfrak{F}$ как отношение числа элементов множества A к n:

$$P(A) = \frac{1}{n} N_n \{ m \in A \} = \nu_n \{ m \in A \}. \qquad (2.4)$$

Алгебра множеств $\mathfrak{F}$ вместе с функцией множества $P(A)$ образуют, очевидно, конечное поле вероятностей.

Взяв некоторое число $r \geqslant 2$, определим для простых $p \leqslant r$ функции $f^{(p)}(m)$. По отношению к нашему полю вероятностей функции $f^{(p)}(m)$, $m \leqslant n$, можно рассматривать как случайные величины, принимающие значения $f(p^\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p)$ с вероятностями

$$\nu_n \{ \beta_p(m) = \alpha \} = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\left[\frac{n}{p^\alpha} \right] - \left[\frac{n}{p^{\alpha+1}} \right] \right) & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha < \gamma_p, \\ \frac{1}{n} \left[\frac{n}{p^\alpha} \right] \quad \text{при} \quad \alpha = \gamma_p. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Пусть $p \neq q$, $p \leqslant r$, $q \leqslant r$. Имеем:

$$\nu_n \left\{ \beta_p(m) = \alpha, \quad \beta_q(m) = \beta \right\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\left[\frac{n}{p^\alpha q^\beta} \right] - \left[\frac{n}{p^{\alpha+1} q^\beta} \right] - \left[\frac{n}{p^\alpha q^{\beta+1}} \right] + \left[\frac{n}{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}} \right] \right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если} \quad 0 \leqslant \alpha < \gamma_p, \quad 0 \leqslant \beta < \gamma_q, \\ \frac{1}{n} \left(\left[\frac{n}{p^\alpha q^\beta} \right] - \left[\frac{n}{p^{\alpha+1} q^\beta} \right] \right), \quad \text{если} \quad 0 \leqslant \alpha < \gamma_p, \quad \beta = \gamma_q, \\ \frac{1}{n} \left(\left[\frac{n}{p^\alpha q^\beta} \right] - \left[\frac{n}{p^\alpha q^{\beta+1}} \right] \right), \quad \text{если} \quad \alpha = \gamma_p, \quad 0 \leqslant \beta < \gamma_q, \\ \frac{1}{n} \left[\frac{n}{p^\alpha q^\beta} \right], \quad \text{если} \quad \alpha = \gamma_p, \quad \beta = \gamma_q. \end{cases}$$

Отсюда и из (2.5) следует, что вообще

$$\nu_n \left\{ \beta_p(m) = \alpha, \; \beta_q(m) = \beta \right\} \neq \nu_n \left\{ \beta_p(m) = \alpha \right\} \nu_n \left\{ \beta_q(m) = \beta \right\}.$$

Поэтому случайные величины $f^{(p)}(m)$ и $f^{(q)}(m)$ не являются вообще независимыми. Однако, как нетрудно подсчитать,

$$\nu_n\left\{\beta_p(m)=\alpha,\ \beta_q(m)=\beta\right\}=$$
$$=\nu_n\left\{\beta_p(m)=\alpha\right\}\nu_n\left\{\beta_q(m)=\beta\right\}+\frac{B}{n}. \qquad (2.6)$$

Поэтому зависимость между $f^{(p)}(m)$ и $f^{(q)}(m)$ является в некотором смысле слабой и вообще тем слабее, чем меньше p и q по сравнению с n. Более того, если $r=r(n)\geqslant 2$ — функция от n, возрастающая медленнее любой положительной степени n при $n\to\infty$; $p_1, \ldots, p_k$ — набор различных между собой простых чисел, не превосходящих r; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — целые числа, $0\leqslant\alpha_l\leqslant\gamma_{p_l}$ $(l=1, \ldots, k)$, то из лемм 1.2 и 1.6 можно получить, что при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\beta_{p_1}(m)=\alpha_1, \ \ldots, \ \beta_{p_k}(m)=\alpha_k\right\}=$$
$$=\prod_{l=1}^{k}\nu_n\left\{\beta_{p_l}(m)=\alpha_l\right\}+o(1). \qquad (2.7)$$

Последнее соотношение свидетельствует о слабой зависимости величин $f^{(p)}(m)$ $(p\leqslant r)$. Это наводит на мысль, что при некоторых предположениях о функциях $f(m)$ к „урезанным функциям"

$$f(m)_r=\sum_{p\leqslant r}f^{(p)}(m)$$

могут быть применимы известные предельные теоремы для сумм почти независимых случайных величин в смысле С. Н. Бернштейна [6] (см. также [25, 31, 32]) или более общие разультаты М. Лоэва [79, 80], Х. Бюльманна [40]. Оказывается, что и в самом деле такое применение может быть осуществлено, на чем мы, однако, не будем останавливаться, так как более общие результаты и притом проще удается получить, связав интегральные предельные законы для аддитивных функций с далеко продвинутой в настоящее время теорией суммирования независимых случайных величин. Этим мы сейчас и займемся.

Второй вариант. Формулы (2.4), (2.5), (2.6) и (2.7) наводят на мысль, что для того чтобы функции $f^{(p)}(m)$ $(p \leqslant r)$, где $r \geqslant 2$ — постоянное число, можно было рассматривать как независимые случайные величины, нужно изменить построенное в первом варианте поле, взяв в качестве E вместо конечного отрезка натурального ряда весь натуральный ряд, а в качестве вероятностной меры $\nu_n\{m \in A\}$ — асимптотическую плотность множества A, выбрав при этом σ-алгебру множеств $\mathfrak{F}$ так, чтобы все ее множества обладали асимптотической плотностью.

Заметим, что совокупность всех подмножеств натурального ряда, обладающих асимптотической плотностью, не образует алгебру множеств, так как объединение, а также пересечение и разность двух множеств, имеющих асимптотическую плотность, не всегда обладают этим свойством. Например, пусть

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{ 2^{2k},\ 2^{2k}+2,\ \ldots,\ 2^{2k+1}-2,$$

$$2^{2k+1}+1,\ 2^{2k+1}+3,\ \ldots,\ 2^{2k+2}-1 \Big\},$$

$$C = \{2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}.$$

Асимптотическая плотность для каждого из множеств A и C существует и равна $\frac{1}{2}$, в то время как для

$$A \cap C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{ 2^{2k},\ 2^{2k}+2,\ \ldots,\ 2^{2k+1}-2 \Big\}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \nu_n \Big\{ m \in A \cap C \Big\} = \frac{1}{6},$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \nu_n \Big\{ m \in A \cap C \Big\} = \frac{1}{3}.$$

Не обладает асимптотической плотностью и $A \cup C$, $A \backslash C$.

Далее, не всякая алгебра множеств целых положительных чисел, обладающих асимптотической плотностью, образует вместе с асимптотической плотностью как вероятностной мерой поле вероятностей. Пусть, например, $\mathfrak{F}$ состоит из всех конечных множеств целых положительных чисел и их дополнений до множества всех целых положительных чисел. $\mathfrak{F}$ является алгеброй множеств, причем все множества из $\mathfrak{F}$ имеют асимптотическую плотность (равную 0 или 1). В пределах $\mathfrak{F}$ асимптотическая плотность обладает конечной аддитивностью, но не имеет счетной аддитивности. В самом деле, пусть $A_n=\{n\}$. Тогда

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=P(E)=1,$$

в то время как

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=0.$$

Впрочем, $\mathfrak{F}$ не является σ-алгеброй.

Поэтому мы поступим следующим образом. Обозначим через $E(p^{\alpha})$ ($p\leqslant r$; $\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma_p$) – множество всех целых положительных чисел m, удовлетворяющих условию $\beta_p(m)=\alpha$. Пусть $\mathfrak{F}$ – наименьшая алгебра множеств, содержащая все $E(p^{\alpha})$.

Для всякого k вида

$$k=\prod_{p\leqslant r} p^{\alpha_p},$$

где $0\leqslant \alpha_p\leqslant \gamma_p$, введем множество

$$E_k=\bigcap_{p\leqslant r} E(p^{\alpha_p(k)}).$$

E_k состоит из всех целых положительных чисел m, обладающих свойством $\beta_p(m)=\alpha_p(k)$ для $p\leqslant r$. Согласно лемме 1.6 при $n\to\infty$

$$\nu_n\{m\in E_k\}\to\prod_{p\leqslant r}\pi(p^{\alpha_p(k)}).$$

Следовательно, множества E_k обладают асимптотической плотностью.

Теперь легко показать, что асимптотической плотностью обладают все множества $A\in\mathfrak{F}$. Для этого достаточно заметить, что множества E_k попарно не пересекаются и что всякое множество $A \in \mathfrak{F}$ можно представить в виде

$$A = \bigcup_k E_k,$$

где объединение берется по некоторым k.

Построенная нами алгебра множеств $\mathfrak{F}$ совместно с функцией множества $P(A)$ образуют конечное поле вероятностей в смысле Колмогорова. Относительно этого поля функции $f^{(p)}(m)$ $(p \leqslant r)$ можно рассматривать как случайные величины, принимающие значения $f(p^{\alpha})$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p)$ с вероятностями $\pi(p^{\alpha})$. Кроме того, случайные величины $f^{(p)}(m)$ $(p \leqslant r)$ являются независимыми, как это следует из тождества

$$P\left(\beta_{p_1}(m) = \alpha_1, \ \ldots, \ \beta_{p_k}(m) = \alpha_k\right) = \prod_{l=1}^{k} P\left(\beta_{p_l}(m) = \alpha_l\right),$$

справедливого согласно лемме 1.6 для любого набора различных между собой простых чисел $p_1, \ldots, p_k$; $p_l \leqslant r$ $(l = 1, \ldots, k)$, и любых целых неотрицательных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; $\alpha_l \leqslant \gamma_{p_l}$ $(l = 1, \ldots, k)$. Таким образом, относительно нашего поля вероятностей „урезанная функция" $f(m)_r$ представляет собою сумму независимых случайных величин.

Третий вариант. Рассмотрим еще один метод, позволяющий свести изучение предельных законов для аддитивных арифметических функций к изучению предельных законов для сумм некоторых иезависимых случайных величин.

Как и в первом варианте, рассмотрим в качестве множества элементарных событий конечный отрезок натурального ряда $E = \{1, \ldots, n\}$. Пусть функция $r = r(n)$ удовлетворяет условиям леммы 1.6. Обозначим через $E(p^{\alpha})$ $(p \leqslant r$; $\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p)$ множество всех целых положительных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих условию $\beta_p(m) = \alpha$, а через $\mathfrak{F}$ — наименьшую алгебру множеств, содержащую все $E(p^{\alpha})$. Алгебра множеств $\mathfrak{F}$ совместно с функцией множества $\nu_n\{m \in A\}$ образуют конечное поле вероятностей, а функции $f^{(p)}(m)$

$(p \leqslant r)$ являются случайными величинами относительно этого поля.

Так как

$$\bigcup_{\alpha=0}^{\gamma_p} E(p^\alpha) = E$$

и множества $E(p^\alpha)$ для различных α не пересекаются, то множества алгебры $\mathfrak{F}$ можно представить в виде сумм множеств вида

$$E_k = \bigcap_{p \leqslant r} E(p^{\alpha_p(k)}),$$

где

$$k = \prod_{p \leqslant r} p^{\alpha_p}, \qquad 0 \leqslant \alpha_p \leqslant \gamma_p.$$

Очевидно, что множества E_k не имеют общих элементов при различных k.

Подсчитаем теперь частоту ν_n для множества

$$A = \bigcup_k{}' E_k,$$

где объединение берется по некоторым k. Будем считать, что k различны между собой. Тогда

$$\nu_n\{m \in A\} = \sum_k{}' \nu_n\{m \in E_k\}.$$

Если $k < \sqrt{n}$, то согласно лемме 1.6

$$\nu_n\{m \in E_k\} = \prod_{p \leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)}) \cdot (1 + BR),$$

где

$$R = \exp\left(-c \frac{\ln n}{\ln r}\right), \qquad c = \min(c_9,\ c_{30}).$$

Согласно лемме 1.2

$$\sum_{k \geqslant \sqrt{n}}{}' \nu_n\{m \in E_k\} \leqslant \nu_n\left\{m \in \bigcup_{k \geqslant \sqrt{n}} E_k\right\} = BR,$$

где оценка равномерна по $A \in \mathfrak{F}$. Следовательно,

$$\nu_n\{m \in A\} = \sum_{k < \sqrt{n}}{}' \prod_{p \leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)}) \cdot (1 + BR) + BR.$$

Согласно лемме 1.6 асимптотическая плотность множества целых положительных чисел m, удовлетворяющих условиям $\beta_p(m)=\alpha_p(k)$ для всех $p \leqslant r$, равна

$$\prod_{p\leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)}).$$

Следовательно, сумма

$$\sum_{k\geqslant\sqrt{n}} \prod_{p\leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)})$$

представляет собою асимптотическую плотность всех целых положительных чисел m, удовлетворяющих условиям $\beta_p(m)=\alpha_p(k)$ для всех $p\leqslant r$ и хотя бы одного $k\geqslant\sqrt{n}$. Согласно лемме 1.2 она равна BR. Таким образом,

$$\nu_n\{m\in A\}=\sum_k{}' \prod_{p\leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)})+BR,$$

где оценка BR, как следует из доказательства, равномерна по всем $A\in\mathfrak{F}$.

Заметим еще, что в силу тождества

$$\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p} \pi(p^{\alpha_p})=1$$

сумма по всем возможным k

$$\sum_k \prod_{p\leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)})=\prod_{p\leqslant r}\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p} \pi(p^{\alpha})=1.$$

Введем теперь для множеств A системы $\mathfrak{F}$ другую вероятностную меру

$$P(A)=\sum_k{}' \prod_{p\leqslant r} \pi(p^{\alpha_p(k)}),$$

если

$$A=\bigcup_k{}' E_k.$$

Из сказанного выше имеем, что для множеств $A\in\mathfrak{F}$

$$\nu_n\{m\in A\}-P(A)=B\exp\left(-c\frac{\ln n}{\ln r}\right),$$

где оценка равномерна по всем A.

Определим относительно меры P случайные величины $\xi_p=\xi_p(m)$ $(p\leqslant r)$, полагая, что $\xi_p(m)=f^{(p)}(m)$. Таким образом, случайная величина ξ_p принимает значения $f(p^\alpha)$ $(\alpha=0, 1, \ldots, \gamma_p)$ с вероятностями $\pi(p^\alpha)$ соответственно. Легко видеть, что совместное распределение случайных величин $\xi_p(p\leqslant r)$ равно произведению по $p\leqslant r$ одномерных распределений случайных величин ξ_p. Отсюда следует, что распределение относительно меры ν_n случайной величины

$$f(m)_r=\sum_{p\leqslant r} f^{(p)}(m)$$

лишь на величину $\exp\left(-c\dfrac{\ln n}{\ln r}\right)$ отличается от распределения относительно P суммы независимых случайных величин

$$\sum_{p\leqslant r}\xi_p.$$

В случае сильно аддитивных функций $f(p^\alpha)=f(p)$ для $\alpha=2, 3, \ldots$. Поэтому тогда $\xi_p(p\leqslant r)$ принимает лишь два значения: $f(p)$ и 0 с вероятностями $1/p$ и $1-1/p$ соответственно.

Изложенные выше соображения применимы и в том случае, когда аддитивная арифметическая функция рассматривается не на всем множестве целых положительных чисел, а на некоторой последовательности целых положительных чисел, если только для этой последовательности имеют место аналоги лемм 1.2 и 1.6. Так, например, обстоит дело в случае последовательностей $R(m)$ $(m=1, 2, \ldots)$, $R(p)$, где $R(x)$ — полином с целыми коэффициентами.

Пусть функция $r=r(n)$ удовлетворяет условиям леммы 1.5; $R(m)$ — полином с целыми коэффициентами, $R(m)>0$ $(m=1, 2, \ldots)$, $E=\{1, \ldots, n\}$, $E(p^\alpha)=E\left(\beta_p\left(R(m)\right)=\alpha\right)$ для $\alpha=0, 1, \ldots, \gamma_p$; $n_0<p\leqslant r$, где n_0 — достаточно большое, но фиксированное число, зависящее лишь от коэффициентов

$R(m)$, $\mathfrak{F}$ — наименьшая алгебра множеств, содержащая все $E(p^{\alpha})$. Определим для всех $A \in \mathfrak{F}$ две меры:

$$\nu_n\{m \in A\} \quad \text{и} \quad P(A) = \sum_k{}' \prod_{n_0 < p \leqslant r} \pi_R(p^{\alpha}),$$

если

$$A = \bigcup_k{}' \bigcap_{n_0 < p \leqslant r} E(p^{\alpha_p(k)})$$

и объединение берется по некоторым числам k, имеющим вид

$$k = \prod_{n_0 < p \leqslant r} p^{\alpha_p}, \quad 0 \leqslant \alpha_p \leqslant \gamma_p.$$

Здесь

$$\pi_R(p^{\alpha}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\vartheta_R(p)}{p}, & \text{если} \quad \alpha = 0, \\ \dfrac{\vartheta_R(p)}{p^{\alpha}}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right), & \text{если} \quad 1 \leqslant \alpha < \gamma_p, \\ \dfrac{\vartheta_R(p)}{p^{\alpha}}, & \text{если} \quad \alpha = \gamma_p, \end{cases}$$

$\vartheta_R(p)$ — число классов вычетов, удовлетворяющих сравнению $R(m) \equiv 0 \bmod p$. Пусть $\xi_p(m)$ $(n_0 < p \leqslant r)$ — независимые случайные величины, принимающие значения $f(p^{\alpha})$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p)$ с вероятностями $\pi_R(p^{\alpha})$. Тогда [33, 34]

$$\nu_n\left\{\sum_{n_0 < p \leqslant r} f^{(p)}\big(R(m)\big) \in A\right\} = P\left\{\sum_{n_0 < p \leqslant r} \xi_p(m) \in A\right\} + $$
$$+ B \exp\left(-c \frac{\ln n}{\ln r}\right)$$

равномерно по всем $A \in \mathfrak{F}$.

Аналогично рассматривается и случай $f\big(R(p)\big)$, хотя здесь аналог леммы 1.6 имеется лишь для весьма медленно растущих функций $r(n)$. Для больших $r(n)$, используя современные теоремы о „плотности“ нулей L-функций Дирихле, можно доказать аналог леммы 1.6 для подавляющего большинства простых чисел p, однако и этого достаточно для многих вопросов [3, 5].

Те же соображения применимы и к мультипликативным функциям. Если мультипликативная функция $g(m)$ принимает для всех целых положительных m положительные значения, то сказанное выше применяется к функции $\log g(m)$, причем берется главное значение логарифма. Если $g(p^\alpha)=0$ для некоторых степеней простых чисел p^α, а для других степеней простых чисел $g(p^\alpha)>0$, то распределение значений функции $g(m)$ рассматривается не на всем натуральном ряде, а лишь на некотором множестве E' целых положительных чисел, в каноническое разложение которых входят лишь те p^α, для которых $g(p^\alpha)>0$. К E' можно применить изложенные выше соображения, если только для него имеет место аналог леммы 1.6. Такие аналоги часто можно получить элементарными методами или путем использования производящих рядов Дирихле. Однако на этом мы не будем останавливаться, заметим лишь, что вместо $\nu_n\{m\in A\}$ здесь целесообразно рассматривать меру

$$\frac{N_n\{m\in A\cap E'\}}{N_n\{m\in E'\}}.$$

3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

В предыдущем параграфе мы показали, что изучение асимптотического распределения „урезанных" аддитивных арифметических функций $f(m)_r$ сводится к изучению предельного поведения распределения сумм слабо зависимых или независимых случайных величин. Последнее можно осуществить при помощи известных предельных теорем теории вероятностей. Нас, однако, будут интересовать в конечном счете не урезанные функции $f(m)_r$, а сами $f(m)$. Оказывается, что законы распределения для $f(m)$ можно часто получить из законов для $f(m)_r$. Для перехода от одних функций к другим используется некоторый аналог теоретико-вероятностного закона больших чисел, который и сам по себе представляет интерес.

Доказательство этого закона является аналогией доказательства неравенства Чебышева.

Пусть $f(m)$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ — любая последовательность вещественных чисел. Первый момент A_n и второй центральный момент D_n функции распределения

$$\nu_n\{f(m)<x\}=F_n(x)$$

равны соответственно

$$A_n=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m),$$

$$D_n=\int_{-\infty}^{\infty}(x-A_n)^2\,dF_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(f(m)-A_n\right)^2.$$

Пусть, далее, ε — любое положительное число. Тогда имеем:

$$\varepsilon^2 D_n N_n \left\{ |f(m) - A_n| > \varepsilon \sqrt{D_n} \right\} \leqslant \sum_{m=1}^{n} \left(f(m) - A_n \right)^2 = nD_n.$$

Если $f(m)$ при $m = 1, 2, \ldots, n$ принимает хотя бы два различных значения, то $D_n \neq 0$, и мы получаем:

$$\nu_n \left\{ |f(m) - A_n| > \varepsilon \sqrt{D_n} \right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Если же все значения $f(m)$ при $m = 1, 2, \ldots, n$ совпадают, то это неравенство тривиально. Оно и есть аналог неравенства Чебышева.

Отсюда выводим, что для любой положительной неограниченно возрастающей при $n \to \infty$ функции $\psi(n)$

$$\nu_n \left\{ |f(m) - A_n| \leqslant \psi(n) \sqrt{D_n} \right\} \to 1,$$

когда $n \to \infty$. Полученное предельное соотношение естественно рассматривать как некоторый аналог закона больших чисел для вещественных арифметических функций $f(m)$. Оно имеет место, очевидно, и для комплексных $f(m)$, если положим аналогично прежнему

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(m),$$

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} |f(m) - A_n|^2.$$

В случае аддитивных функций $f(m)$ их значения полностью определяются значениями $f(p^\alpha)$, и для конкретных функций подсчет A_n и D_n сводится обычно к подсчету некоторых выражений от $f(p^\alpha)$. Поэтому представляется естественным попытаться получить такой аналог закона больших чисел, где A_n и D_n заменены соответствующими выражениями от $f(p^\alpha)$. Сравнительно простые подсчеты (см. например, доказательство леммы 3.1 и § 4) доказывают, что для обширного класса аддитивных функций

$$D_n \sim D^2(n), \quad A_n = A(n) + BD(n).$$

Доказываемая в этом параграфе теорема 3.1 представляет собою аналог закона больших чисел с $A(n)$ и $D(n)$ вместо A_n и $\sqrt{D_n}$.

Лемма 3.1. *Для любой комплексной аддитивной арифметической функции* $f(m)$

$$\sum_{m=1}^{n} |f(m)-A(n)|^2 = BnD^2(n).$$

Доказательство. Обозначим через S оцениваемую сумму. В силу элементарного неравенства $|a+b|^2 \leqslant 2|a|^2 + 2|b|^2$, справедливого для любых комплексных чисел a, b, имеем:

$$S \leqslant 2\sum_{m=1}^{n} |f(m)-K|^2 + 2n|K-A(n)|^2,$$

где

$$K = \sum_{p^\alpha \leqslant n} \rho(p^\alpha) f(p^\alpha). \tag{3.1}$$

Согласно (1.5) и неравенству Коши

$$\left|\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n\\ \alpha>1}} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right| \leqslant \left(\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n\\ \alpha>1}} \frac{1}{p^\alpha} \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{|f^2(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = BD(n)$$

и аналогично

$$\left|\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}}\right| \leqslant \left(\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{1}{p^{\alpha+2}} \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{|f^2(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= BD(n)\left(\sum_{p} \frac{1}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}} = BD(n).$$

Поэтому

$$K - A(n) = BD(n),$$

вследствие чего оценка для S приобретает вид

$$S \leqslant 2\sum_{m=1}^{n} \left(f(m)-K\right)\left(\bar{f}(m)-\bar{K}\right) + BnD^2(n), \tag{3.2}$$

где черточка обозначает комплексно-сопряженную величину.

Далее, имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)=\sum_{m=1}^{n} \sum_{p^{\alpha} \| m} f(p^{\alpha})=\sum_{p^{\alpha} \leqslant n} f(p^{\alpha}) N_n\{p^{\alpha} \| m\}.$$

Но число целых положительных $m \leqslant n$, делящихся на p^{α}, но не делящихся на $p^{\alpha+1}$, равно числу всех $m \leqslant n$, делящихся на p^{α}, уменьшенному на число тех $m \leqslant n$, которые делятся на $p^{\alpha+1}$; следовательно,

$$N_n\{p^{\alpha} \| m\}=\left[\frac{n}{p^{\alpha}}\right]-\left[\frac{n}{p^{\alpha+1}}\right]=n\rho(p^{\alpha})+B.$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)=n \sum_{p^{\alpha} \leqslant n} \rho(p^{\alpha}) f(p^{\alpha})+B \sum_{p^{\alpha} \leqslant n} |f(p^{\alpha})|.$$

Оценим последнюю сумму с помощью неравенства Коши и (1.4)

$$\sum_{p^{\alpha} \leqslant n} |f(p^{\alpha})| \leqslant\left(\sum_{p^{\alpha} \leqslant n} p^{\alpha} \cdot \sum_{p^{\alpha} \leqslant n} \frac{|f^{2}(p^{\alpha})|}{p^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n}\, D(n)\left(\sum_{p^{\alpha} \leqslant n} 1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{BnD(n)}{\sqrt{\ln n}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)=nK+\frac{BnD(n)}{\sqrt{\ln n}}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь

$$\sum_{m=1}^{n} |f(m)|^{2}.$$

Имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} |f(m)|^{2}=\sum_{m=1}^{n} \sum_{p^{\alpha} \| m} \sum_{q^{\beta} \| m} f(p^{\alpha}) \bar{f}(q^{\beta})=\sum_{p^{\alpha} \leqslant n} |f^{2}(p^{\alpha})| N_n\{p^{\alpha} \| m\}+$$

$$+\sum_{\substack{p^{\alpha} q^{\beta} \leqslant n \\ p \neq q}} f(p^{\alpha}) \bar{f}(q^{\beta}) N_n\left\{p^{\alpha} \| m,\ q^{\beta} \| m\right\}.$$

Заметим, что при $p \neq q$

$$N_n\{p^\alpha \| m,\ q^\beta \| m\} = N_n\{p^\alpha q^\beta | m\} -$$
$$- N_n\{p^{\alpha+1} q^\beta | m\} - N_n\{p^\alpha q^{\beta+1} | m\} + N_n\{p^{\alpha+1} q^{\beta+1} | m\} =$$
$$= \left[\frac{n}{p^\alpha q^\beta}\right] - \left[\frac{n}{p^{\alpha+1} q^\beta}\right] - \left[\frac{n}{p^\alpha q^{\beta+1}}\right] + \left[\frac{n}{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}\right].$$

Последнее выражение равно

$$n\rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) + B.$$

Эти соотношения и неравенство

$$N_n\{p^\alpha \| m\} \leqslant \frac{n}{p^\alpha}$$

влекут за собой оценку

$$\sum_{m=1} |f(m)|^2 = Bn\,D^2(n) + n \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n \\ p \neq q}} \rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) +$$
$$+ B \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n} \left| f(p^\alpha) f(q^\beta) \right|. \qquad (3.4)$$

Оценим последнюю сумму. Используя опять неравенство Коши, очевидно, получим:

$$\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n} \left| f(p^\alpha) f(q^\beta) \right| \leqslant \left(\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n} p^\alpha q^\beta \cdot \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n} \frac{|f^2(p^\alpha) f^2(q^\beta)|}{p^\alpha q^\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{n}\, D^2(n) \left(\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n} 1 \right)^{\frac{1}{2}} = Bn\,D^2(n).$$

При помощи тех же приемов оценим ошибку, которую мы совершим, отбрасывая во втором члене правой части формулы (3.4) условие $p \neq q$. Имеем:

$$\left| \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n \\ p = q}} \rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n \\ p = q}} \frac{|f^2(p^\alpha)|}{p^\alpha q^\beta} \cdot \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n \\ p = q}} \frac{|f^2(q^\beta)|}{p^\alpha q^\beta} \right)^{\frac{1}{2}} = B \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{|f^2(p^\alpha)|}{p^{\alpha+1}} = BD^2(n).$$

Все эти оценки дают:

$$\sum_{m=1}^{n} |f(m)|^2 = n \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n} \rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) + Bn\, D^2(n). \quad (3.5)$$

Оценим еще K. Согласно (1.6)

$$|K| \leqslant \left(\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{1}{p^\alpha} \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{|f^2(p^\alpha)|}{p^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = BD(n)\sqrt{\ln\ln n}. \quad (3.6)$$

Подставляя теперь (3.1), (3.3), (3.5) и (3.6) в (3.2), найдем:

$$S \leqslant 2n \left| \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n} \rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) - |K|^2 \right| + Bn\, D^2(n) =$$

$$= 2n \left| \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > n \\ p^\alpha \leqslant n,\, q^\beta \leqslant n}} \rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) \right| + Bn\, D^2(n).$$

И эту сумму оценим посредством неравенства Коши. По модулю она не превосходит

$$\left(\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > n \\ p^\alpha \leqslant n,\, q^\beta \leqslant n}} \frac{1}{p^\alpha q^\beta} \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n,\, q^\beta \leqslant n} \frac{|f^2(p^\alpha) f^2(q^\beta)|}{p^\alpha q^\beta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вторая сумма равна $D^4(n)$. Первая сумма оценивается при помощи (1.6) и (1.7):

$$\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > n \\ p^\alpha \leqslant n,\, q^\beta \leqslant n}} \frac{1}{p^\alpha q^\beta} = 2 \sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{p^\alpha} \sum_{\frac{n}{p^\alpha} < q^\beta \leqslant n} \frac{1}{q^\beta} + \left(\sum_{\sqrt{n} < p^\alpha \leqslant n} \frac{1}{p^\alpha} \right)^2 =$$

$$= 2 \sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{p^\alpha} \left(\ln \frac{\ln n}{\ln n - \ln p^\alpha} + \frac{B}{\ln n} \right) + B =$$

$$= \frac{B}{\ln n} \sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{n}} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} + B = B. \quad (3.7)$$

Таким образом,

$$S = Bn\, D^2(n),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что в случае сильно аддитивных функций $D(n) \asymp B(n)$. Поэтому лемму 3.1 можно сформулировать следующим образом.

Лемма 3.1^a. *Для любой комплексной сильно аддитивной функции* $f(m)$

$$\sum_{m=1}^{n} |f(m) - A(n)|^2 = Bn\, B^2(n).$$

Очевидным следствием леммы 3.1 является следующая

Теорема 3.1. *Для любого* $t > 0$ *и всякой комплексной аддитивной арифметической функции* $f(m)$

$$\nu_n \left\{ |f(m) - A(n)| \leqslant tD(n) \right\} = 1 + \frac{B}{t^2}. \tag{3.8}$$

Таким образом, для любой положительной неограниченно возрастающей функции $\psi(n)$

$$\nu_n \left\{ |f(m) - A(n)| \leqslant D(n)\psi(n) \right\} \to 1 \tag{3.9}$$

при $n \to \infty$.

Теорема доказывает, что для всех $m \leqslant n$, за исключением Bnt^{-2} чисел, $f(m) = A(n) + BtD(n)$.

В случае сильно аддитивных функций теореме 3.1 можно придать такой вид.

Теорема 3.1^a. *Пусть* $f(m)$ — *комплексная сильно аддитивная арифметическая функция,* t — *любое положительное число,* $\psi(n)$ — *любая положительная неограниченно возрастающая функция. Тогда*

$$\nu_n \left\{ |f(m) - A(n)| \leqslant tB(n) \right\} = 1 + \frac{B}{t^2} \tag{3.10}$$

и

$$\nu_n \left\{ |f(m) - A(n)| \leqslant B(n)\psi(n) \right\} \to 1 \tag{3.11}$$

при $n \to \infty$.

Можно однако показать, что теорема 3.1^a имеет место и для очень широкого класса аддитивных функций, не являющихся сильно аддитивными.

Предварительно докажем одну простую **лемму.**

Лемма 3.2. *Пусть* $\{q^\alpha\}$ — *некоторая последовательность простых чисел или их целых положительных степеней такая, что ряд*

$$\sum_{q^\alpha} \frac{1}{q^\alpha}$$

сходится, $f(m)$ *и* $f^*(m)$ — *любые комплексные аддитивные арифметические функции, удовлетворяющие условию* $f(p^\alpha) = f^*(p^\alpha)$ *для всех* p^α, *отличных от* q^α. *Тогда по всякому* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $L = L(\varepsilon)$, *что для всех* n

$$\nu_n\left\{ \left| f(m) - f^*(m) \right| > L \right\} < \varepsilon.$$

Доказательство. Из сходимости ряда следует существование такого $M = M(\varepsilon)$, что

$$\sum_{q^\alpha > M} \frac{1}{q^\alpha} < \varepsilon.$$

Положим

$$L = \sum_{q^\alpha \leqslant M} \left| f(q^\alpha) - f^*(q^\alpha) \right|.$$

Обозначим через A множество всех целых положительных чисел, в каноническое разложение которых входит какое-либо $q^\alpha > M$. Ясно, что

$$N_n\{ m \in A \} \leqslant \sum_{q^\alpha > M} \left[\frac{n}{q^\alpha} \right] \leqslant n \sum_{q^\alpha > M} \frac{1}{q^\alpha} < \varepsilon n.$$

Для завершения доказательства леммы остается показать, что для всех $m \notin A$

$$\left| f(m) - f^*(m) \right| \leqslant L.$$

Из канонического представления аддитивных функций имеем, что

$$f(m) - f^*(m) = \sum_{q^\alpha \| m} \left(f(q^\alpha) - f^*(q^\alpha) \right).$$

Если $m \notin A$, то

$$\left| f(m) - f^*(m) \right| = \left| \sum_{\substack{q^\alpha \| m \\ q^\alpha \leqslant M}} \left(f(q^\alpha) - f^*(q^\alpha) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q^\alpha \leqslant M} \left| f(q^\alpha) - f^*(q^\alpha) \right| \leqslant L.$$

Лемма доказана.

Так как ряд

$$\sum_{p^\alpha,\ \alpha > 1} \frac{1}{p^\alpha}$$

сходится, то, изменив любым образом значения $f(p^\alpha)$, $\alpha > 1$, например, положив $f(p^\alpha) = f(p)$, $\alpha = 2, 3, \ldots$, мы изменим функцию $f(m)$ для всех чисел $m \leqslant n$, за исключением $< n\varepsilon$ чисел, лишь на величину, не превосходящую по модулю некоторого числа L, причем L зависит только от ε и $f(m)$ и не зависит от n. Из сказанного следует

Теорема 3.1^b. *Пусть $f(m)$ — любая комплексная аддитивная функция, t — положительное число, $\psi(n)$ — положительная неограниченно возрастающая функция. Если $B(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то* (3.10) *имеет место при любом $n > n_0(t)$; величина B ограничена постоянной, не зависящей от n. Соотношение* (3.11) *справедливо для всех тех $f(m)$, для которых $B(n)$ не равно тождественно нулю.*

В то время как (3.8) и (3.9) справедливы для всех аддитивных функций, (3.10) и (3.11) имеют место не всегда. Так, например, если $f(p) = 0$ для всех простых p, но $f(p^\alpha) > 0$ для всех p^α, $\alpha > 1$, то (3.10) и (3.11) не верны. Заметим, впрочем, что если $f(p^\alpha) = 0$ для большого числа p^α, то более точные результаты дает изучение функции $f(m)$ не на всем натуральном ряде, а лишь на некотором множестве целых положительных чисел, в каноническое разложение которых входят только те степени простых чисел p^α, для которых $f(p^\alpha) \neq 0$.

Теорему 3.1 можно обобщить в различных направлениях. Мы приведем одно простое обобщение. Для этого из леммы 3.1 выведем следующую лемму 3.3, которая. равно как и лемма 3.1, пригодится нам в дальнейшем.

Лемма 3.3. *Пусть* $a_1, \ldots, a_s$ — *фиксированные целые неотрицательные числа;* $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — *аддитивные комплексные арифметические функции, не равные тождественно нулю, причем* $D_k(n+a_k)=BD_k(n)$ $(k=1, \ldots, s)$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{s}\frac{f_k(m+a_k)-A_k(n)}{D_k(n)}\right|^2=Bn.$$

Здесь величина B *ограничена константой, зависящей только от* $s, a_1, \ldots, a_s$.

Доказательство. Оцениваемая сумма равна

$$B\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{D_k^2(n)}\sum_{m=1}^{n}\left|f_k(m+a_k)-A_k(n)\right|^2=$$

$$=B\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{D_k^2(n+a_k)}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left|f_k(m+a_k)-A_k(n+a_k)\right|^2+\right.$$

$$\left.+n\left|A_k(n+a_k)-A_k(n)\right|^2\right\}.$$

Согласно лемме 3.1

$$\sum_{m=1}^{n}\left|f_k(m+a_k)-A_k(n+a_k)\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{n+a_k}\left|f_k(m)-A_k(n+a_k)\right|^2=Bn\,D_k^2(n+a_k).$$

Далее, очевидно, имеем:

$$\left|A_k(n+a_k)-A_k(n)\right|^2=\left|\sum_{n<p\leqslant n+a_k}\frac{f_k(p)}{p}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n<p\leqslant n+a_k}\frac{1}{p}\cdot\sum_{p\leqslant n+a_k}\frac{|f_k^2(p)|}{p}=BD_k^2(n+a_k).$$

Сопоставляя все эти оценки, получаем лемму.

Следствием леммы 3.3 является

Теорема 3.2. *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — фиксированные целые неотрицательные числа; $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — аддитивные комплексные арифметические функции, не равные тождественно 0, причем $D_k(n+a_k)=BD_k(n)$ $(k=1, \ldots, s)$; t — любое положительное число. Тогда*

$$\nu_n\left\{\left|\sum_{k=1}^{s}\frac{f_k(m+a_k)-A_k(n)}{D_k(n)}\right|<t\right\}=1+\frac{B}{t^2},$$

B ограничена константой, зависящей только от $s, a_1, \ldots, a_s$. В частности, для любой положительной неограниченно возрастающей функции $\psi(n)$

$$\nu_n\left\{\left|\sum_{k=1}^{s}\frac{f_k(m+a_k)-A_k(n)}{D_k(n)}\right|<\psi(n)\right\}\to 1$$

при $n\to\infty$.

В частном случае, если a — любое неотрицательное число, $f(m)$ удовлетворяет условиям $D(n+a)=BD(n)$, $D(n)$ не равно тождественно 0, то

$$\nu_n\{|f(m)-f(m+a)|\leqslant tD(n)\}=1+\frac{B}{t^2},$$

$$\nu_n\{|f(m)-f(m+a)|\leqslant D(n)\psi(n)\}\to 1$$

при $n\to\infty$.

Как и выше в случае теоремы 3.1, так и в случае нескольких функций при весьма общих предположениях можно ограничиться рассмотрением лишь сильно аддитивных функций.

Аналогичные соображения приводят к следующим теоремам [33,5].

Теорема 3.3. *Пусть $R(m)$ — полином с целыми коэффициентами, $R(m)>0$ $(m=1, 2, \ldots)$, $f(m)$ — вещественная сильно аддитивная арифметическая функция, $\vartheta_R(p)$ — число класс вычетов, удовлетворяющих сравнению $R(m)\equiv 0 \bmod p$,*

$$A_R(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{\vartheta_R(p)f(p)}{p},\qquad B_R(n)=\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{\vartheta_R(p)f^2(p)}{p}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$\max\limits_{p\leqslant n}|f(p)|=BB_R(n)$, *$t$ — любое положительное число.*

Тогда

$$\nu_n\left\{\left|f\left(R(m)\right)-A_R(n)\right|\leqslant tB_R(n)\right\}=1+\frac{B}{t^2}.$$

Оценка зависит лишь от самого полинома $R(m)$.

Теорема 3.4. *В условиях теоремы* 3.3 *число простых чисел* $p\leqslant n$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\left|f\left(R(p)\right)-A_R(n)\right|\leqslant tB_R(n),$$

равно

$$\frac{n}{\ln n}\left(1+\frac{B}{t^2}\right).$$

Оценка зависит лишь от полинома $R(m)$.

Для доказательства теоремы 3.4 надо привлечь некоторые свойства чисел $\lambda(p)$ А. Сельберга и „дисперсионный" метод Ю. В. Линника [24].

Примеры. Пусть a — фиксированное целое положительное число, $\psi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

1) Для функций $\omega(m)$ и $\Omega(m)$

$$A(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\ln\ln n+B,$$

$$B^2(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\sim\ln\ln n.$$

2) Для функции $\omega_1(n)$

$$A(n)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv 1 \bmod 4}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\ln\ln n+B,$$

$$B^2(n)\sim\frac{1}{2}\ln\ln n.$$

3) Для функции $\omega_2(n)$

$$A(n)=\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1 \bmod 4}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\ln\ln n+B,$$

$$B^2(n)\sim\frac{1}{2}\ln\ln n.$$

4) Для функции $\log_k \tau_k(m)$

$$\tau_k(p^\alpha)=\binom{k+\alpha-1}{\alpha},$$

$$A(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{\log_k \tau_k(p)}{p}=\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\ln\ln n+B,$$

$$B^2(n)\sim\ln\ln n.$$

Из теорем 3.1[a], 3.1[b], 3.2 следует, что при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\left|\omega(m)-\ln\ln n\right|<\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{\left|\Omega(m)-\ln\ln n\right|<\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{\left|\omega_j(m)-\frac{1}{2}\ln\ln n\right|<\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1 \qquad (j=1,\ 2),$$

$$\nu_n\left\{k^{\ln\ln n-\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}<\tau_k(m)<k^{\ln\ln n+\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{\left|\omega(m)-\omega(m+a)\right|<\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{\left|\omega_1(m)-\omega_2(m)\right|<\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{2^{-\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\,\tau(m)<\tau(m+a)<\right.$$
$$\left.<2^{\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\,\tau(m)\right\}\to 1,$$

$$\nu_n\left\{2^{2\ln\ln n-\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}<\tau(m)\,\tau(m+a)<\right.$$
$$\left.<2^{2\ln\ln n+\psi(n)\sqrt{\ln\ln n}}\right\}\to 1.$$

Из леммы 3.2 имеем, что

$$\nu_n\left\{k^{\omega(m)-\psi(n)}<\tau_k(m)<k^{\omega(m)+\psi(n)}\right\}\to 1$$

при $n\to\infty$.

Функция $\tau_k(m)$ дает пример применения наших теорем к мультипликативным функциям, не обращающимся в нуль ни при одном значении аргумента m. Аналогичные законы можно вывести и для мультипликативных функций, принимающих значение 0. Приведем без доказательства результат для функции $4W(m)$, выражающей число решений уравнения $m = x^2 + y^2$ в целых числах, причем решения (x, y) и (y, x) считаются различными, если $x \neq y$. Как известно, $W(m)$ является мультипликативной функцией,

$$W(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = 2, \\ \alpha + 1, & \text{если } p \equiv 1 \bmod 4, \\ 0, & \text{если } p \equiv -1 \bmod 4, \ \alpha - \text{нечетное}, \\ 1, & \text{если } p \equiv -1 \bmod 4, \ \alpha - \text{четное}. \end{cases}$$

Обозначим через E' множество всех целых положительных чисел, в каноническое разложение которых не входят нечетные степени простых чисел $p \equiv -1 \bmod 4$. Можно показать, что

$$\frac{N_n\left\{ 2^{\frac{1}{2}\ln\ln n - \psi(n)\sqrt{\ln\ln n}} < W(m) < 2^{\frac{1}{2}\ln\ln n + \psi(n)\sqrt{\ln\ln n}} \right\}}{N_n\{ m \in E' \}} \to 1$$

при $n \to \infty$. Так как

$$N_n\{ m \in E' \} \sim n \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \equiv -1 \bmod 4}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim \frac{c_{33}\, n}{\sqrt{\ln n}},$$

то

$$N_n\left\{ 2^{\frac{1}{2}\ln\ln n - \psi(n)\sqrt{\ln\ln n}} < W(m) < 2^{\frac{1}{2}\ln\ln n + \psi(n)\sqrt{\ln\ln n}} \right\} \sim \frac{c_{33}\, n}{\sqrt{\ln n}}.$$

4. ОДНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. **Вводные замечания. Класс** H. Переходим теперь к рассмотрению предельных теорем для функций распределения

$$\nu_n\left\{f(m) < x\right\}$$

при $n \to \infty$, где $f(m)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция. В § 2 мы показали, что изучение асимптотического распределения „урезанных" функций $f(m)_r$ сводится к изучению предельного поведения функций распределения некоторых сумм слабо зависимых или независимых случайных величин. Нам удобнее всего будет пользоваться третьим способом сведения, изложенным в § 2, хотя и другие способы могут быть использованы для наших целей. В § 2 мы показали, что если $r = r(n)$ растет медленнее любой положительной степени n при $n \to \infty$, то

$$\nu_n\left\{f(m)_r < x\right\}$$

лишь на величину, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно x, отличается от функции распределения суммы независимых случайных величин

$$\sum_{p \leqslant r} \xi_p, \tag{4.1}$$

где ξ_p принимает значения $f(p^\alpha)$ с вероятностями $\pi(p^\alpha)$ $(\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma_p)$. Следовательно, к функциям $f(m)_r$ можно применить все те предельные теоремы для сумм независимых величин, которые вообще есть смысл сюда переносить.

В частности, таким образом можно указать необходимые и достаточные условия, чтобы при некотором подборе постоянных A_n и D_n и соблюдении требования предельной равномерной пренебрегаемости нормированных слагаемых законы распределения

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)_r-A_n}{D_n}<x\right\} \tag{4.2}$$

сходились к предельным.

Постоянные A_n и D_n можно подобрать исходя из следующих соображений. Речь у нас идет о предельных теоремах для нарастающих сумм независимых случайных величин ([11], гл. 6). Из одной леммы А. Я. Хинчина ([11], стр. 155) следует, что при соблюдении условия предельной пренебрегаемости слагаемых ξ_p / D_n величины D_n нужно подбирать так, чтобы $D_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Далее, поскольку дисперсии случайных величин ξ_p являются конечными, то естественно требовать, чтобы не только законы распределения сумм

$$\frac{1}{D_n}\left(\sum_{p\leqslant r}\xi_p-A_n\right)$$

сходились к предельному, но и их дисперсии сходились к дисперсии предельного закона. Это требование приводит к наиболее простым результатам. Тогда в качестве постоянной A_n можно выбрать ([11], стр. 163) среднее значение суммы (4.1)

$$A_n=\sum_{p^\alpha\leqslant r}\pi(p^\alpha)f(p^\alpha),$$

а в качестве D_n — ее стандарт

$$D_n=\left\{\sum_{p^\alpha\leqslant r}\pi(p^\alpha)f^2(p^\alpha)-\sum_{p\leqslant r}\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\pi(p^\alpha)f(p^\alpha)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Нас, однако, будут интересовать в конечном счете не урезанные функции $f(m)_r$, а сами функции $f(m)$ и их законы распределения. При этом оказывается, что для весьма широкого класса функций $f(m)$ предельные законы для (4.1) могут нам дать и соответствующие законы для функций $f(m)$, если, например, предельные законы для (4.1) и для

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A'_n}{D'_n}<x\right\},$$

где A'_n, D'_n — некоторые постоянные, существуют одновременно и совпадают. Последнее обстоятельство имеет место, если для всякого фиксированного $\varepsilon>0$

$$\nu_n\left\{\left|\frac{f(m)-A'_n}{D'_n}-\frac{f(m)_r-A_n}{D_n}\right|\geqslant\varepsilon\right\}\to 0$$

при $n\to\infty$.

Для доказательства этого утверждения мы приведем следующую простую лемму, которая нам не раз пригодится в дальнейшем.

Лемма 4.1. *Пусть даны две последовательности серий вещественных чисел*

$$g_n(m),\ h_n(m)\quad (n=1,\ 2,\ \ldots;\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и пусть для всякого фиксированного $\varepsilon>0$

$$\nu_n\left\{|g_n(m)-h_n(m)|\geqslant\varepsilon\right\}\to 0$$

при $n\to\infty$. *Если*

$$\nu_n\{g_n(m)<x\}$$

при $n\to\infty$ *стремится к некоторой функции распределения* $F(x)$ *в ее точках непрерывности, то тогда и*

$$\nu_n\{h_n(m)<x\}$$

при $n\to\infty$ *сремится к* $F(x)$ *в ее точках непрерывности.*

Доказательство. Имеем:

$$N_n\left\{g_n(m)<x-\varepsilon\right\}-N_n\left\{|g_n(m)-h_n(m)|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$$
$$\leqslant N_n\left\{h_n(m)<x\right\}\leqslant N_n\left\{g_n(m)<x+\varepsilon\right\}+$$
$$+N_n\left\{|g_n(m)-h_n(m)|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

Отсюда согласно предположениям леммы найдем:

$$F(x-\varepsilon)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\nu_n\{h_n(m)<x\}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\nu_n\{h_n(m)<x\}\leqslant F(x+\varepsilon),$$

если $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon$ являются точками непрерывности функции $F(x)$. Если x является точкой непрерывности функции $F(x)$, то

$$\nu_n\{h_n(m)<x\}\to F(x)$$

при $n\to\infty$.

Из леммы 4.1, в частности, имеем

Следствие. *Если $D_n=D'_n+o(D'_n)$, $A_n=A'_n+o(D'_n)$ и для всех $m\leqslant n$, за исключением $o(n)$ чисел, $f(m)=f'(m)+o(D'_n)$, где $f'(m)$ — любая (не обязательно аддитивная) функция, то*

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A_n}{D_n}<x\right\} \quad \text{и} \quad \nu_n\left\{\frac{f'(m)-A'_n}{D'_n}<x\right\}$$

имеют одновременно предельные функции распределения, которые в случае их существования совпадают.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 4.2. *Если $f(m)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция с условием $D(n)\to\infty$; $\lambda>0$ — фиксированное положительное число, то*

$$\sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+\lambda}}=o\left(D^2(n)\right),\quad \sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^{\alpha+1}}=o\left(D(n)\right),$$

$$\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ \alpha>1}}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}=o\left(D(n)\right),\quad \sum_{p\leqslant n}\left(\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)^2=o\left(D^2(n)\right).$$

Доказательство. Пусть ε — любое положительное число, $n_0=(2\varepsilon^{-1})^{1/\lambda}$. Существует такое $n_1=n_1(\varepsilon)>n_0$, что при $n>n_1$

$$\sum_{p^\alpha\leqslant n_0}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+\lambda}}<\frac{\varepsilon}{2}D^2(n).$$

Тогда для $n>n_1$

$$\frac{1}{D^2(n)}\sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+\lambda}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{D^2(n)}\frac{1}{n_0^\lambda}\sum_{n_0<p^\alpha\leqslant n}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n_0^\lambda}=\varepsilon,$$

что и доказывает первое соотношение. Отсюда следуют второе и третье соотношения, так как согласно неравенству Коши

$$\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^{\alpha+1}} \leqslant \left(\sum_{p^\alpha} \frac{1}{p^{\alpha+1}} \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ \alpha > 1}} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha} \leqslant \left(\sum_{p^\alpha, \alpha > 1} \frac{1}{p^{\frac{2}{3}\alpha}} \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\frac{4}{3}\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= B \left(\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha + \frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}} = o\Big(D(n)\Big).$$

Четвертая сумма в силу неравенства Коши

$$\leqslant \sum_{p \leqslant n} \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} \cdot \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \right) = B \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}}.$$

И здесь первое соотношение дает требуемый результат.

Из этой леммы в предположении, что $D(n) \to \infty$, имеем:

$$|A_n - A(r)| \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{r}} \frac{|f(p)|}{p^2} + \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant r \\ \alpha > 1}} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha} = o\Big(D(r)\Big),$$

$$D_n^2 - D^2(r) = \sum_{p^\alpha \leqslant r} \left(\pi(p^\alpha) - \frac{1}{p^\alpha}\right) f^2(p^\alpha) -$$

$$- \sum_{p \leqslant r} \left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} \pi(p^\alpha) f(p^\alpha) \right)^2 =$$

$$= B \sum_{p^\alpha \leqslant r} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}} + B \sum_{p \leqslant r} \left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha} \right)^2 = o\Big(D^2(r)\Big),$$

или

$$A_n = A(r) + o\Big(D(r)\Big), \quad D_n = D(r) + o\Big(D(r)\Big).$$

Из всего изложенного и леммы 4.1 следует, что при естественном предположении $D(n) \to \infty$ в качестве величин A_n и D_n в (4.2) можно выбрать $A(r)$ и $D(r)$.

Как уже отмечалось, мы будем ограничиваться рассмотрением функций $f(m)$ в предположении, что предельные законы для $f(m)_r$ и $f(m)$ при соответствующей нормировке совпадают. Требование совпадения предельных законов для

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)_r-A(r)}{D(r)}<x\right\} \quad \text{и} \quad \nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{D(n)}<x\right\} \tag{4.3}$$

нас приводит естественным образом к требованию $D(r)/D(n)\to 1$ при $n\to\infty$. Итак, мы будем рассматривать некоторый класс функций, который для краткости назовем H. К этому классу мы отнесем вещественные аддитивные арифметические функции $f(m)$, для которых $D(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и существует такая неограниченно возрастающая функция $r=r(n)$, что $\ln r(n)/\ln n\to 0$, $D(r(n))\big/D(n)\to 1$. В случае сильно аддитивных функций эти условия превращаются в $B(n)\to\infty$, $B(r(n))\big/B(n)\to 1$.

Для функций $f(m)$ из класса H предельные законы для (4.3) могут существовать лишь одновременно и в случае существования совпадают. Это следует из леммы 4.1, определения класса H и оценки

$$\nu_n\left\{\left|\frac{\big(f(m)-A(n)\big)-\big(f(m)_r-A(r)\big)}{D(n)}\right|>\varepsilon\right\}=B\,\frac{D^2(n)-D^2(r)}{\varepsilon^2 D^2(n)},$$

справедливой согласно теореме 3.1, так как разность $f(m)-f(m)_r$ является аддитивной функцией на множестве $\{1,\dots,n\}$ и величина B ограничена абсолютной постоянной.

При изучении предельных законов для функций класса H полезно воспользоваться следующими замечаниями. Пусть $f(m)\in H$ и пусть $\{q^\alpha\}$ — последовательность целых положительных степеней простых чисел такая, что ряд

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{q^\alpha} \tag{4.4}$$

сходится. Определим другую аддитивную арифметическую функцию $f^*(m)$, полагая, что $f(p^\alpha)=f^*(p^\alpha)$ для всех p^α, отличных от чисел последовательности $\{q^\alpha\}$, для чисел же

q^α пусть $f^*(q^\alpha)$ пробегает любые значения. Из лемм 3.2 и 4.1 имеем, что предельные законы для

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{D(n)}<x\right\} \quad \text{и} \quad \nu_n\left\{\frac{f^*(m)-A(n)}{D(n)}<x\right\}$$

могут существовать лишь одновременно и совпадают. Пусть

$$A^*(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{f^*(p)}{p}, \quad D^*(n)=\left(\sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{f^{*2}(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из известных теорем А. Я. Хинчина ([11], стр. 45, 47) следует, что если ограничиться лишь собственными предельными законами, то законы для

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{D(n)}<x\right\} \quad \text{и} \quad \nu_n\left\{\frac{f^*(m)-A^*(n)}{D^*(n)}<x\right\}$$

должны принадлежать к одному и тому же типу, причем

$$\frac{D(n)}{D^*(n)} \quad \text{и} \quad \frac{A(n)-A^*(n)}{D^*(n)}$$

должны стремиться к некоторым постоянным при $n\to\infty$. Отсюда, в частности, имеем, что $f^*(m)\in H$, так как

$$\frac{D^*(r(n))}{D^*(n)}=\frac{D^*(r(n))}{D(n)}\,\frac{D(n)}{D^*(n)}\sim\frac{D^*(r(n))}{D(r(n))}\,\frac{D(n)}{D^*(n)}\to 1.$$

Таким образом, вместо функции $f(m)$ мы можем рассматривать любую другую функцию, получаемую путем изменения значений $f(p^\alpha)$ для некоторой последовательности $\{p^\alpha\}$, удовлетворяющей условию (4.4). В частности, нам достаточно ограничиться рассмотрением лишь сильно аддитивных функций класса H. При этом, как мы сейчас докажем, дисперсии законов

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{D(n)}<x\right\} \quad \text{и} \quad \nu_n\left\{\frac{f^*(m)-A(n)}{B(n)}<x\right\},$$

где $f^*(m)$ — сильно аддитивная функция, связанная с $f(m)$ соотношениями $f^*(p^\alpha)=f(p)$ $(\alpha=1, 2, \ldots)$ для всех простых p, равны $1+o(1)$, т. е. отличаются лишь величиной, стремящейся к 0 при $n\to\infty$.

Лемма 4.3. *Если $f(m) \in H$, $r = r(n)$ — соответствующая функция, a — фиксированное целое неотрицательное число, то*

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m+a) = \sum_{p^\alpha \leqslant n+a} \rho(p^\alpha) f(p^\alpha) + \frac{BD(n)}{\sqrt{\ln n}} =$$
$$= A(n) + o\Big(D(n)\Big) = BD(n)\sqrt{\ln\ln n},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m+a)_r = \sum_{p^\alpha \leqslant r} \rho(p^\alpha) f(p^\alpha) + \frac{BD(r)}{\sqrt{\ln r}} =$$
$$= A(r) + o\Big(D(r)\Big) = BD(r)\sqrt{\ln\ln r}.$$

Доказательство. Имеем, очевидно, что

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m+a) = \sum_{p^\alpha \leqslant n+a} \rho(p^\alpha) f(p^\alpha) + \frac{B}{n}\sum_{p^\alpha \leqslant n+a} |f(p^\alpha)|.$$

Неравенство Коши и (1.4) показывают, что вторая сумма равна

$$Bn\,\frac{D(n+a)}{\sqrt{\ln n}} = \frac{Bn\,D(n)}{\sqrt{\ln n}}.$$

Далее,

$$\left|\sum_{p^\alpha \leqslant n+a} \rho(p^\alpha) f(p^\alpha) - A(n)\right| \leqslant \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n \\ \alpha > 1}} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha} +$$
$$+ \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^{\alpha+1}} + \sum_{r < p^\alpha \leqslant n+a} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}.$$

Поэтому в силу леммы 4.2 и неравенства Коши

$$\sum_{p^\alpha \leqslant n+a} \rho(p^\alpha) f(p^\alpha) = A(n) + o\Big(D(n)\Big) +$$
$$+ B\left(\sum_{n < p^\alpha \leqslant n+a} \frac{1}{p^\alpha} \cdot \sum_{n < p^\alpha \leqslant n+a} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= A(n) + o\Big(D(n)\Big) + B\Big(D^2(n+a) - D^2(n)\Big)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= A(n) + o\Big(D(n)\Big).$$

Наконец,

$$A(n)=\sum_{p\leqslant n}\frac{f(p)}{p}\leqslant\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\cdot\sum_{p\leqslant n}\frac{f^2(p)}{p}\right)^{\frac{1}{2}}=BD(n)\sqrt{\ln\ln n},$$

вследствие чего

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m+a)=BD(n)\sqrt{\ln\ln n}.$$

Вторая формула доказывается аналогично.

Как видно из доказательства, лемма справедлива не только для функций класса H.

Лемма 4.4. *Если $f_1(m)\in H$, $f_2(m)\in H$, $r_1=r_1(n)$, $r_2=r_2(n)$ — соответствующие функции, $r=r(n)=\max\left(r_1(n),\ r_2(n)\right)$; a_1, a_2 — фиксированные целые неотрицательные числа, то*

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_1(m+a_1)\,f_2(m+a_2)-M_1(n)\,M_2(n)=$$
$$=\varkappa\sum_{p^\alpha\leqslant r}\frac{f_1(p^\alpha)\,f_2(p^\alpha)}{p^\alpha}+o\left(D_1(n)\,D_2(n)\right),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_1(m+a_1)_r\,f_2(m+a_2)_r-M_1(n)_r\,M_2(n)_r=$$
$$=\varkappa\sum_{p^\alpha\leqslant r}\frac{f_1(p^\alpha)\,f_2(p^\alpha)}{p^\alpha}+o\left(D_1(n)\,D_2(n)\right),$$

где

$$M_j(n)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_j(m+a_j),$$
$$(j=1,\ 2)$$
$$M_j(n)_r=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f\,(m+a_j)_r,$$

$$\varkappa=\begin{cases}1, & \textit{если}\quad a_1=a_2,\\ 0, & \textit{если}\quad a_1\neq a_2.\end{cases}$$

Доказательство. Подсчитаем

$$S=\sum_{m=1}^{n}f_1(m+a_1)f_2(m+a_2)=$$

$$=\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n+a_1\\ q^\beta\leqslant n+a_2}} f_1(p^\alpha)f_2(q^\beta)N_n\{p^\alpha\,\|\,m+a_1,\ q^\beta\,\|\,m+a_2\}.$$

Замечая, что система сравнений

$$\begin{cases} m\equiv -a_1 \bmod p^\gamma,\\ m\equiv -a_2 \bmod q^\delta\end{cases}$$

разрешима тогда и только тогда, когда $(p^\gamma,\ q^\delta)\,|\,a_1-a_2$, и в случае разрешимости имеет

$$\frac{n\,(p^\gamma,\ q^\delta)}{p^\gamma q^\delta}+B$$

или 0, если

$$\frac{(p^\gamma,\ q^\delta)}{p^\gamma q^\delta}>n+a,\quad a=\max(a_1,\ a_2),$$

решений в $m\leqslant n$, заключаем, что

$$N_n\{p^\alpha\,\|\,m+a_1,\ q^\beta\,\|\,m+a_2\}=$$

$$=N_n\{p^\alpha\,|\,m+a_1,\ q^\beta\,|\,m+a_2\}-N_n\{p^{\alpha+1}\,|\,m+a_1,\ q^\beta\,|\,m+a_2\}-$$

$$-N_n\{p^\alpha\,|\,m+a_1,\ q^{\beta+1}\,|\,m+a_2\}+N_n\{p^{\alpha+1}\,|\,m+a_1,\ q^{\beta+1}|\,m+a_2\}$$

равно

$$n\rho(p^\alpha)\,\rho(q^\beta)+B,\quad \text{если}\quad p\neq q,$$

$$0,\quad \text{если}\quad p\neq q,\ p^\alpha q^\beta>n+a,$$

$$0,\quad \text{если}\quad p=q,\ p^{\min(\alpha,\ \beta)}\nmid a_1-a_2,$$

$$0,\quad \text{если}\quad p=q,\ \alpha\neq\beta,\ a_1=a_2,$$

$$n\rho(p^\alpha)+B,\quad \text{если}\quad p=q,\ \alpha=\beta,\ a_1=a_2,$$

и

$$\leqslant np^{-\max(\alpha,\ \beta)}+B,\ \text{если}\ p=q.$$

Таким образом,

$$S=n\sum\nolimits_1+B\sum\nolimits_2+n\sum\nolimits_3+B\sum\nolimits_4, \tag{4.5}$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a \\ p \neq q}} \rho(p^\alpha)\,\rho(q^\beta) f_1(p^\alpha) f_2(q^\beta),$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a} \left| f_1(p^\alpha) f_2(q^\beta) \right|$$

и

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{p^\alpha \leqslant n+a} \rho(p^\alpha) f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha),$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{p^\alpha \leqslant n+a} \left| f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha) \right|,$$

если $a_1 = a_2$, или

$$\sum\nolimits_3 = B \sum_{p^\alpha \mid a_1 - a_2} \sum_{\beta=\alpha}^{\left[\frac{\ln(n+a)}{\ln p}\right]} \frac{1}{p^\beta} \left(\left| f_1(p^\alpha) f_2(p^\beta) \right| + \left| f_1(p^\beta) f_2(p^\alpha) \right| \right),$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{p^\alpha \mid a_1 - a_2} \sum_{\beta=\alpha}^{\left[\frac{\ln(n+a)}{\ln p}\right]} \left(\left| f_1(p^\alpha) f_2(p^\beta) \right| + \left| f_1(p^\beta) f_2(p^\alpha) \right| \right),$$

если $a_1 \neq a_2$.

Так как согласно (1.4)

$$\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a} 1 = \sum_{p^\alpha \leqslant \frac{n+a}{2}} \sum_{q^\beta \leqslant \frac{n+a}{p^\alpha}} 1 = B \sum_{p^\alpha \leqslant \frac{n+a}{2}} \frac{n}{p^\alpha \ln \frac{n}{p^\alpha}} =$$

$$= \frac{Bn}{\sqrt{\ln n}} \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{1}{p^\alpha} + Bn \sum_{n \exp(-\sqrt{\ln n}) < p^\alpha \leqslant n} \frac{1}{p^\alpha} =$$

$$= \frac{Bn \ln\ln n}{\sqrt{\ln n}} + Bn \ln \frac{\ln n}{\ln n - \sqrt{\ln n}} = \frac{Bn}{\sqrt[3]{\ln n}},$$

то в силу неравенства Коши

$$\sum_2^2 \leqslant \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a} p^\alpha q^\beta \cdot \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a} \frac{f_1^2(p^\alpha) f_2^2(q^\beta)}{p^\alpha q^\beta} =$$

$$= Bn\, D_1^2(n)\, D_2^2(n) \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a} 1 =$$

$$= Bn^2 (\ln n)^{-\frac{1}{3}} D_1^2(n)\, D_2^2(n) = o\Big(n^2 D_1^2(n)\, D_2^2(n)\Big). \qquad (4.6)$$

Далее, при $a_1 = a_2$ согласно лемме 4.2

$$\sum_3 - \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha)}{p^\alpha} =$$

$$= - \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}} + \sum_{n < p^\alpha \leqslant n+a} \rho(p^\alpha) f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha) =$$

$$= B\left(\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_1^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}} \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_2^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ B\left(\sum_{n < p^\alpha \leqslant n+a} \frac{f_1^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \cdot \sum_{n < p^\alpha \leqslant n+a} \frac{f_2^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= o\Big(D_1(n)\, D_2(n)\Big) + B\Big(D_1^2(n+a) - D_1^2(n)\Big)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Big(D_2^2(n+a) - D_2^2(n)\Big)^{\frac{1}{2}} = o\Big(D_1(n)\, D_2(n)\Big).$$

Если же $a_1 \neq a_2$, то

$$\sum_3 = B \sum_{p^\alpha \| a_1 - a_2} \left\{ |f_1(p^\alpha)| \left(\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{p^\beta} \cdot \sum_{\beta=1}^{\left[\frac{\ln(n+a)}{\ln p}\right]} \frac{f_2^2(p^\beta)}{p^\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + |f_2(p^\alpha)| \left(\sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{p^\beta} \cdot \sum_{\beta=1}^{\left[\frac{\ln(n+a)}{\ln p}\right]} \frac{f_1^2(p^\beta)}{p^\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= B\Big(D_2(n+a) + D_1(n+a)\Big) = o\Big(D_1(n)\, D_2(n)\Big).$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_3 = \varkappa \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha)}{p^\alpha} + o\Big(D_1(n) D_2(n)\Big). \qquad (4.7)$$

Переходим к оценке $\sum_4$. Пусть $a_1 = a_2$. Имеем:

$$\sum\nolimits_4^2 \leqslant \sum_{p^\alpha \leqslant n+a} f_1^2(p^\alpha) \cdot \sum_{p^\alpha \leqslant n+a} f_2^2(p^\alpha).$$

Так как $f_1(m) \in H$, $f_2(m) \in H$, то существуют функции $r_1 = r_1(n)$, $r_2 = r_2(n)$ такие, что $D_1(r_1)/D_1(n) \to 1$, $D_2(r_2)/D_2(n) \to 1$, $\ln r_1/\ln n \to 0$, $\ln r_2/\ln n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда первая из наших сумм равна

$$Br_1 \sum_{p^\alpha \leqslant r_1} \frac{f_1^2(p^\alpha)}{p^\alpha} + Bn \sum_{r_1 < p^\alpha \leqslant n+a} \frac{f_1^2(p^\alpha)}{p^\alpha} =$$

$$= Br_1 D_1^2(n) + Bn\Big(D_1^2(n+a) - D_1^2(r_1)\Big) = o\Big(n D_1^2(n)\Big),$$

а вторая аналогичным образом $o\Big(n D_2^2(n)\Big)$, так что

$$\sum\nolimits_4 = o\Big(n D_1(n) D_2(n)\Big).$$

В случае, когда $a_1 \neq a_2$,

$$\sum\nolimits_4 = B \sum_{p^\beta \leqslant n+a} \Big\{ |f_2(p^\beta)| + |f_1(p^\beta)| \Big\},$$

откуда, используя неравенство Коши и (1.4), найдем, что

$$\sum\nolimits_4 = B \left\{ \sum_{p^\beta \leqslant n+a} p^\beta \cdot \sum_{p^\beta \leqslant n+a} \frac{1}{p^\beta} \Big(f_1^2(p^\beta) + f_2^2(p^\beta) \Big) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{Bn}{\sqrt{\ln n}} \Big(D_1(n) + D_2(n) \Big).$$

Таким образом, во всех случаях

$$\sum\nolimits_4 = o\Big(n D_1(n) D_2(n)\Big). \qquad (4.8)$$

Оценим, наконец, ошибку, которую совершим, опуская в сумме $\sum_1$ условие $p \neq q$. Она не превосходит по абсолютному значению суммы

$$\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a \\ p=q}} \frac{|f_1(p^\alpha) f_2(q^\beta)|}{p^\alpha q^\beta} \leqslant \left(\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a \\ p=q}} \frac{f_1^2(p^\alpha)}{p^\alpha q^\beta} \cdot \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a \\ p=q}} \frac{f_2^2(q^\beta)}{p^\alpha q^\beta} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= B \left(\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_1^2(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}} \cdot \sum_{q^\beta \leqslant n} \frac{f_2^2(q^\beta)}{q^{\beta+1}} \right)^{\frac{1}{2}} = o\Big(D_1(n) D_2(n)\Big)$$

согласно лемме 4.2.

Учитывая последнюю оценку и (4.6), (4.7), (4.8), из (4.5) получим:

$$S = n \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant n+a} \rho(p^\alpha) \rho(q^\beta) f_1(p^\alpha) f_2(q^\beta) +$$

$$+ \varkappa n \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha)}{p^\alpha} + o\Big(n D_1(n) D_2(n)\Big).$$

На основании леммы 4.3

$$\frac{1}{n} S - M_1(n) M_2(n) - \varkappa \sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f_1(p^\alpha) f_2(p^\alpha)}{p^\alpha} =$$

$$= - \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n+a_1 \\ q^\beta \leqslant n+a_2 \\ p^\alpha q^\beta > n+a}} \rho(p^\alpha) \rho(q^\beta) f_1(p^\alpha) f_2(q^\beta) + o\Big(D_1(n) D_2(n)\Big).$$

Остается показать, что сумма в правой части этого равенства $\left(\text{назовем её } \sum_5\right)$ имеет порядок $o\Big(D_1(n) D_2(n)\Big)$.

Нам потребуется оценка ($j=1, 2$)

$$\sum_{p^\alpha \leqslant r_j} \; \sum_{\frac{n+a}{p^\alpha} < q^\beta \leqslant n+a} \frac{1}{p^\alpha p^\beta} =$$

$$= \sum_{p^\alpha \leqslant r_j} \frac{1}{p^\alpha} \left(\ln \frac{\ln (n+a)}{\ln (n+a) - \ln p^\alpha} + \frac{B}{\ln \frac{n}{r_j}} \right) =$$

$$= \frac{B}{\ln n} \sum_{p^\alpha \leqslant r_j} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} = B \frac{\ln r_j}{\ln n} = o(1),$$

справедливая в силу (1.6) и (1.7), и оценка (3.7). Получим:

$$\sum_5 = B\left(\sum_{p^\alpha \le r_1}\ \sum_{\frac{n+a}{p^\alpha} < q^\beta \le n+a} + \sum_{q^\beta \le r_2}\ \sum_{\frac{n+a}{q^\beta} < p^\alpha \le n+a} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{r_1 < p^\alpha \le n+a \\ r_2 < q^\beta \le n+a \\ p^\alpha q^\beta > n+a}} \frac{|f_1(p^\alpha) f_2(q^\beta)|}{p^\alpha q^\beta}\right) =$$

$$= B D_1(n+a) D_2(n+a) \left\{ \left(\sum_{p^\alpha \le r_1}\ \sum_{\frac{n+a}{p^\alpha} < q^\beta \le n+a} \frac{1}{p^\alpha q^\beta} \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{q^\beta \le r_2}\ \sum_{\frac{n+a}{q^\beta} < p^\alpha \le n+a} \frac{1}{p^\alpha q^\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} +$$

$$+ \left(D_1^2(n+a) - D_1^2(r_1)\right)^{\frac{1}{2}} \left(D_2^2(n+a) - D_2^2(r_2)\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{p^\alpha \le n+a \\ q^\beta \le n+a \\ p^\alpha q^\beta > n+a}} \frac{1}{p^\alpha q^\beta} \right)^{\frac{1}{2}} = o\left(D_1(n) D_2(n)\right),$$

что и заканчивает доказательство первой части леммы. Вторая часть доказывается аналогично.

Лемма 4.5. *Пусть $f(m) \in H$, $r = r(n)$ — соответствующая функция. Дисперсии законов*

$$\nu_n\left\{ \frac{f(m) - A(n)}{D(n)} < x \right\}, \quad \nu_n\left\{ \frac{f(m)_r - A(r)}{D(n)} < x \right\}$$

и законов

$$\nu_n\left\{ \frac{f(m) - A(n)}{B(n)} < x \right\}, \quad \nu_n\left\{ \frac{f(m)_r - A(r)}{B(n)} < x \right\},$$

если $f(m)$ — сильно аддитивная функция, равны $1 + o(1)$.

Доказательство. Дисперсии первых двух законов равны соответственно

$$\frac{1}{D^2(n)}\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^2(m)-\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m)\right)^2\right\},$$

$$\frac{1}{D^2(n)}\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^2(m)_r-\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m)_r\right)^2\right\}.$$

Согласно лемме 4.4 эти выражения равны $1+o(1)$. В случае сильно аддитивных функций

$$B^2(n)-D^2(n)=B\sum_{p\leqslant n}\frac{f^2(p)}{p^2}=o\left(D^2(n)\right)$$

в силу леммы 4.2. Поэтому дисперсии последних двух законов также равны $1+o(1)$.

Интегральные законы. Среди возможных предельных интегральных законов мы докажем лишь один, на наш взгляд наиболее интересный. Для этого мы используем следующую теорему Б. В. Гнеденко. Отметим, однако, что для наших целей пригодны и другие предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.

Лемма 4.6. *Пусть дана последовательность серий*

$$\xi_{n1},\ \xi_{n2},\ \ldots,\ \xi_{nk_n}$$

независимых в каждой серии случайных величин, обладающих конечной дисперсией и подчиненных условию

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant k_n} P\{|\xi_{nk}-M\xi_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0$$

при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$. Здесь M означает символ среднего значения, а $P\{\ldots\}$ — вероятность события, указанного в скобках. Для того чтобы при надлежащем подборе постоянных A_n законы распределения сумм

$$\xi_{n1}+\xi_{n2}+\ldots+\xi_{nk_n}-A_n$$

сходились к предельному и дисперсии этих сумм сходились к дисперсии предельного закона, необходимо и достаточно, *чтобы существовала неубывающая функция $K(u)$, определенная на всей числовой прямой, такая, что при $n\to\infty$*

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u} x^2 dP\{\xi_{nk}-M\xi_{nk}<x\}\to K(u)$$

во всех точках непрерывности $K(u)$ и $u=\infty$, причем $K(\infty)=\lim_{n\to\infty} K(u)$. Постоянные A_n можно выбрать по формуле

$$A_n=\sum_{k=1}^{k_n} M\xi_{nk}.$$

Логарифм характеристической функции $\ln\varphi(t)$ предельного закона вычисляется по формуле Колмогорова

$$\ln\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\frac{1}{u^2}\,dK(u), \tag{4.9}$$

где подинтегральная функция при $u=0$ считается равной $-\frac{1}{2}t^2$.

Доказательство см. в [11], стр. 107—108.

Теорема 4.1. *Для того чтобы законы распределения*

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}<x\right\},$$

где $f(m)$ — сильно аддитивная функция из класса H, сходились к предельному с дисперсией 1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $K(u)$ с вариацией единица, что при $n\to\infty$ во всех точках непрерывности $K(u)$

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ f(p)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}\to K(u). \tag{4.10}$$

Логарифм характеристической функции предельного закона вычисляется по формуле Колмогорова (4.9).

Доказательство. Из условия $f(m)\in H$ следует существование такой неограниченно возрастающей функции

$r=r(n)$, что $\ln r(n)/\ln n \to 0$, $B(r)/B(n) \to 1$ при $n\to\infty$. Рассмотрим независимые дискретные случайные величины $\xi_p (p\leqslant r)$, где ξ_p принимает значения $f(p)$ и 0 с вероятностями $1/p$ и $1-1/p$ соответственно, и докажем, пользуясь леммой 4.6, что условия теоремы необходимы и достаточны для сходимости законов распределения сумм

$$\frac{1}{B(n)}\sum_{p\leqslant r}\left(\xi_p-\frac{f(p)}{p}\right) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{4.11}$$

к предельному и дисперсий этих сумм к дисперсии предельного закона и что в случае сходимости предельный закон определяется формулой (4.9).

Докажем сначала, что слагаемые

$$\frac{1}{B(n)}(\xi_p - M\,\xi_p) \qquad (p\leqslant r)$$

равномерно предельно пренебрегаемы, т. е. что для всякого $\varepsilon>0$

$$h_n(\varepsilon)=\max_{p\leqslant r} P\left\{\frac{|\xi_p - M\xi_p|}{B(n)}>\varepsilon\right\}\to 0$$

при $n\to\infty$. Здесь $M\xi_p$ означает среднее значение ξ_p, P — вероятность. Согласно лемме 4.2 при $n>n_0(\varepsilon)$

$$\max_{p\leqslant r}|M\,\xi_p| = \max_{p\leqslant r}\frac{|f(p)|}{p}<\frac{\varepsilon}{2}B(n).$$

Если для всех $p\leqslant r$ и $n>n_0(\varepsilon)$

$$|f(p)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}B(n),$$

то $h_n(\varepsilon)=0$; в противном случае

$$h_n(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{p(n,\ \varepsilon)},$$

где $p(n,\ \varepsilon)$ означает наименьшее простое число p, для которого $|f(p)|>\frac{\varepsilon}{2}B(n)$. Ясно, что $p(n,\ \varepsilon)\to\infty$ при $n\to\infty$. Поэтому $h_n(\varepsilon)\to 0$ при $n\to\infty$ для всякого фиксированного $\varepsilon>0$.

Рассмотрим последовательность функций

$$K_n(u)=\sum_{p\leqslant r}\int\limits_{-\infty}^{u} x^2 dP\left\{\frac{\xi_p-M\xi_p}{B(n)}<x\right\}=$$

$$=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ f(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ -\frac{f(p)}{p}<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p^2}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Покажем, что функции $K_n(u)$ и функции

$$L_n(u)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ f(p)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}$$

могут сходиться лишь одновременно и притом к одной и той же предельной функции в ее точках непрерывности. Согласно лемме 4.2

$$K_n(u)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ f(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}+o(1),$$

где оценка $o(1)$ равномерна по u. Так как

$$\max_{p\leqslant r}\frac{|f(p)|}{p}=o\left(B(n)\right),$$

то в случае сходимости $K_n(u)$ в точках непрерывности предельной функции также и функция

$$\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ f(p)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}$$

сходится и оба предела совпадают. Согласно определению класса H последняя функция отличается от $L_n(u)$ лишь величиной $o(1)$, причем оценка равномерна относительно u.

Далее очевидно, что дисперсия случайной величины (4.11) равна

$$K_n(\infty)=L_n(\infty)+o(1)=1+o(1).$$

Заметим еще, что

$$\sum_{p\leq r} M\xi_p = \sum_{p\leq r} \frac{f(p)}{p}.$$

Из всего сказанного и из теоремы Гнеденко следует наше утверждение о сходимости законов распределения для 4.11 к предельному и их дисперсий к дисперсии предельного закона.

Функция распределения

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)_r - A(r)}{B(n)} < x\right\}$$

лишь на величину $o(1)$ отличается от функции распределения случайной величины (4.11). В силу равномерности оценки (3.8)

$$\nu_n\left\{\left|\left(f(m)-f(m)_r\right)-\left(A(n)-A(r)\right)\right|>\varepsilon\right\}=\frac{B}{\varepsilon^2}\left\{B^2(n)-B^2(r)\right\}\to 0$$

при $n\to\infty$ для любого фиксированного $\varepsilon>0$. Из лемм 4.1 и 4.5 следует доказываемая теорема.

Из нее следует

Теорема 4.2. *Пусть $f(m)$ — сильно аддитивная арифметическая функция. Если $B(n)\to\infty$ и для всякого фиксированного $\varepsilon>0$*

$$\frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p\leq n \\ |f(p)|>\varepsilon B(n)}} \frac{f^2(p)}{p} \to 0 \tag{4.12}$$

при $n\to\infty$ (аналог условия Линдеберга), то

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{B(n)} < x\right\}\to G(x). \tag{4.13}$$

Если $f(m)\in H$, то для справедливости (4.13) *условие* (4.12) *является необходимым.*

Доказательство. Из выполнения условия Линдеберга вытекает, что $f(m)\in H$. В самом деле, из (4.12) следует существование такой положительной функции $\varepsilon(n)$, что $\varepsilon(n)\to 0$ при $n\to\infty$ и

$$\frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p\leq n \\ f(p)>\varepsilon(n)B(n)}} \frac{f^2(p)}{p} < \varepsilon(n);$$

полагая, $r=r(n)=n^{\varepsilon(n)}$, имеем согласно (1.3):

$$B^2(n)-B^2(r)=\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ |f(p)|\leqslant\varepsilon(n)B(n)}}\frac{f^2(p)}{p}+\sum_{\substack{r<p\leqslant n\\ |f(p)|>\varepsilon(n)B(n)}}\frac{f^2(p)}{p}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^2(n)B^2(n)\sum_{r<p\leqslant n}\frac{1}{p}+\varepsilon(n)B^2(n)=$$

$$=BB^2(n)\,\varepsilon(n)\left(\varepsilon(n)\ln\frac{1}{\varepsilon(n)}+1\right)=B\varepsilon(n)B^2(n).$$

В случае нормального предельного закона $G(x)$ в формуле Колмогорова (4.9)

$$K(u)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad u\leqslant 0,\\ 1 & \text{при} \quad u>0.\end{cases}$$

Поэтому условие (4.10) равносильно условию (4.12).

Сказанное в сочетании с теоремой 4.1 и дает теорему 4.2.

Условию Линдеберга удовлетворяют, в частности, сильно аддитивные функции $f(m)$, обладающие свойствами

$$B(n)\to\infty, \quad \max_{p\leqslant n}|f(p)|=o\big(B(n)\big)$$

при $n\to\infty$.

Примеры. Из теоремы 4.1 или 4.2 и следствия леммы 4.1 имеем, что при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\omega(m)<\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\Omega(m)<\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\omega_j(m)<\frac{1}{2}\ln\ln n+x\sqrt{\frac{1}{2}\ln\ln n}\right\}\to G(x) \qquad (j=1,\ 2),$$

$$\nu_n\left\{\omega_1(m)-\omega_2(m)<x\sqrt{\ln\ln n}\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\tau_k(m)<k^{\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}}\right\}\to G(x).$$

К функции $W(m)$ (см. конец § 3) эти теоремы непосредственно не применимы, однако аналогичным путем можно показать, что

$$\frac{N_n\left\{W(m)<2^{\frac{1}{2}\ln\ln n+x\sqrt{\frac{1}{2}\ln\ln n}},\ m\in E'\right\}}{N_n\{m\in E'\}}\to G(x)$$

при $n\to\infty$. Отсюда следует, что

$$\nu_n\left\{W(m)<2^{\frac{1}{2}\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}}\right\}=$$

$$=\nu_n\{m\in E'\}\,G(x)\bigl(1+o(1)\bigr)+\nu_n\{m\notin E'\}=$$

$$=1-\nu_n\{m\in E'\}\bigl(1-G(x)+o(1)\bigr)=$$

$$=1-\bigl(1-G(x)+o(1)\bigr)\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv-1\bmod 4}}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\cdot\bigl(1+o(1)\bigr)=$$

$$=1-\frac{c_{33}}{\sqrt{\ln n}}\bigl(1-G(x)\bigr)+o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

Заметим, что построенная недавно В. М. Золотаревым аналогичная теории суммирования теория умножения независимых случайных величин позволяет получить аналоги большинства теорем, доказываемых в настоящей работе, для мультипликативных функций, принимающих как положительные, так и отрицательные и вообще комплексные значения.

Возникает вопрос, какие законы вообще могут выступать в качестве предельных в теореме 4.1. Ясно, что они принадлежат классу L, введенному А. Я. Хинчиным ([11], стр. 155). Полный ответ на этот вопрос дает следующая теорема Л. Кубика ([76]) о предельных законах для сумм независимых случайных величин, принимающих лишь два значения.

Лемма 4.6. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих не более двух значений. Класс предельных законов с конечными дисперсия-*

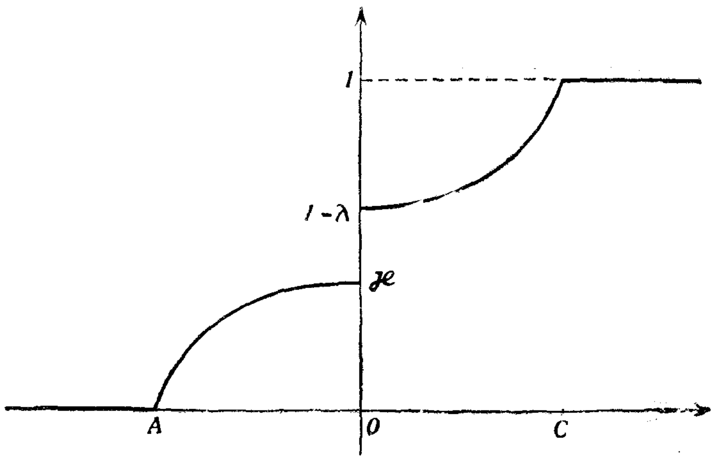
ми, к которым могут стремиться законы распределения сумм

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - A_n \tag{4.14}$$

при соответствующем подборе постоянных A_n, B_n *и при соблюдении условий:*

$$B_n \to \infty, \max_{1\leqslant k\leqslant n} P\left\{\frac{|\xi_k|}{B_n} > \varepsilon\right\} \to 0$$

(P — *вероятность*) *при* $n\to\infty$ *и дисперсии сумм* (4.14) *стремится к дисперсии предельного закона, совпадает с*



Фиг. 1

классом законов распределения K, *для которых функция* $K(u)$ *в формуле Колмогорова* (4.9) *имеет вид* (фиг. 1)

$$K(u)=\begin{cases} 0, & \text{если } u<A,\\ \varkappa\left(1-\dfrac{u^2}{A^2}\right), & \text{если } A<0,\ A\leqslant u<0,\\ \dfrac{\lambda u^2}{C^2}+1-\lambda, & \text{если } C>0,\ 0<u\leqslant C,\\ 1, & \text{если } u>C, \end{cases} \tag{4.15}$$

где A, C, $\varkappa$, λ — *постоянные,* $\varkappa \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\varkappa + \lambda \leqslant 1$, $A \leqslant 0$, $C \geqslant 0$.

Характеристическая функция закона, определяемого функцией $K(u)$, равна

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2}(1 + \varkappa \operatorname{sgn} A - \lambda \operatorname{sgn} C)\, t^2 + \psi_1(t) + \psi_2(t) \right\},$$

где

$$\psi_1(t) = \begin{cases} -\dfrac{2\varkappa}{A}\left(it + \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_A^0 \dfrac{e^{itu}-1}{u}\, du \right), & \text{если} \quad A < 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad A = 0, \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{C}\left(-it + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^C \dfrac{e^{itu}-1}{u}\, du \right), & \text{если} \quad C > 0, \\ 0, \quad \text{если} \quad C = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.3. *Класс предельных законов с дисперсией* 1, *к которым могут стремиться законы распределения*

$$\nu_n\left\{ \frac{f(m) - A(n)}{B_n} < x \right\} \tag{4.16}$$

для сильно аддитивных функций $f(m) \in H$, *совпадает с классом законов, для которых функция Колмогорова* $K(u)$ *определяется формулой* (4.15).

Доказательство. Из доказательства теоремы 4.1 и леммы 4.6 следует, что предельный закон с дисперсией 1 для (4.16), если он существует, должен принадлежать классу K. Нам остается показать, что для каждого закона из K можно найти сильно аддитивную функцию $f(m) \in H$ такую, чтобы закон распределения (4.16) стремился к этому закону.

Разобьем все простые числа на три не пересекающихся класса Q_0, Q_1, Q_2 так, чтобы число простых чисел $p \leqslant n$, $p \in Q_1$, было асимптотически равно

$$\frac{2\varkappa n}{A^2 \ln n \ln\ln n}, \tag{4.17}$$

если $A\varkappa \neq 0$, а число простых чисел $p \leqslant n$, $p \in Q_2$, было асимптотически равно

$$\frac{2\lambda n}{C^2 \ln n \ln\ln n}, \tag{4.18}$$

если $C\lambda \neq 0$. Если же $A\varkappa = 0$ или $C\lambda = 0$, то положим $Q_1 = \varnothing$, $Q_2 = \varnothing$ соответственно.

Из асимптотического закона простых чисел имеем, что число простых чисел $p \leqslant n$, $p \in Q_0$, асимптотически равно

$$\frac{n}{\ln n}. \tag{4.19}$$

Определим сильно аддитивную функцию $f(m)$, положив

$$f(p) = \begin{cases} \sqrt{2(1+\varkappa \operatorname{sgn} A - \lambda \operatorname{sgn} C)\ln\ln p}, & \text{если } p \in Q_0, \\ A \ln\ln p, & \text{если } p \in Q_1, \\ C \ln\ln p, & \text{если } p \in Q_2. \end{cases}$$

Из (4.19), (4.17), (4.18) суммированием по частям получим, что

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in Q_0}} \frac{f^2(p)}{p} = (1 + \varkappa \operatorname{sgn} A - \lambda \operatorname{sgn} C)(\ln\ln n)^2 \Big(1 + o(1)\Big), \tag{4.20}$$

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in Q_1}} \frac{f^2(p)}{p} = -\varkappa \operatorname{sgn} A \, (\ln\ln n)^2 \Big(1 + o(1)\Big), \tag{4.21}$$

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in Q_2}} \frac{f^2(p)}{p} = \lambda \operatorname{sgn} C (\ln\ln n)^2 \Big(1 + o(1)\Big). \tag{4.22}$$

Таким образом,

$$B^2(n) = \sum_{p \leqslant n} \frac{f^2(p)}{p} \sim (\ln\ln n)^2,$$

откуда следует, что $f(m) \in H$.

Подсчитаем теперь

$$\mathrm{K}_n(u) = \frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ f(p) < uB(n)}} \frac{f^2(p)}{p} = K_{n0}(u) + K_{n1}(u) + K_{n2}(u),$$

где

$$K_{nj}(u)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n,\ p\in Q_j\\ f(p)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}\quad (j=0,\ 1,\ 2).$$

Из (4.20) следует, что

$$K_{n0}(u)=\begin{cases}1+\varkappa\,\mathrm{sgn}\,A-\lambda\,\mathrm{sgn}\,C+o(1), & \text{если}\quad u>0,\\ o(1), & \text{если}\quad u\leqslant 0.\end{cases}$$

Из (4.21) имеем, что

$$K_{n1}(u)=-\varkappa\,\mathrm{sgn}\,A+o(1)$$

при $u\geqslant 0$; если же $A<0$, $A<u<0$, то

$$K_{n1}(u)=\frac{1}{B^2(n)}\sum_{\substack{p\in Q_1\\ \exp\exp\left(\frac{u}{A}B(n)\right)<p\leqslant n}}\frac{f^2(p)}{p}=$$

$$=\varkappa-\frac{\varkappa}{B^2(n)}\left(\ln\ln\exp\exp\left(\frac{u}{A}B(n)\right)\right)^2+o(1)=$$

$$=\varkappa\left(1-\frac{u^2}{A^2}\right)+o(1);$$

наконец, при $u\leqslant A$

$$K_{n1}(u)=o(1).$$

Аналогично из (4.22) выводим, что

$$K_{n2}(u)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad u\leqslant 0,\\ \dfrac{\lambda u^2}{C^2}+o(1) & \text{при}\quad 0<u\leqslant C,\ C>0,\\ \lambda\,\mathrm{sgn}\,C+o(1) & \text{при}\quad u>C.\end{cases}$$

Все эти расчеты показывают, что $K_n(u)$ стремится к функции $K(u)$, указанной в формуле (4.15). Применение теоремы 4.1 завершает доказательство.

Класс предельных законов K совпадает также с классом законов для функций распределения

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)_r-A(r)}{B(r)}<x\right\},$$

где $f(m)$ — любая сильно аддитивная арифметическая функция с условием $B(n)\to\infty$, не обязательно принадлежащая к классу H, а $r=r(n)$ удовлетворяет условиям $r(n)\to\infty$, $\ln r(n)=o(\ln n)$. Это не позволяет судить непосредственно о предельных законах для самих функций $f(m)$, так как предельные законы для „урезанных“ функций $f(m)_r$ и самих функций $f(m)$ не всегда совпадают, даже если оба существуют одновременно, как это видно хотя бы из примера аддитивной функции $\ln m$, или сильно аддитивной функции

$$\ln^* m=\sum_{p\mid m}\ln p.$$

Как показывают прямые подсчеты и известные оценки из теории простых чисел для этих функций

$$A(n)\sim\ln n,\quad B(n)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\ln n.$$

Очевидно, что обе функции не принадлежат к классу H. Рассуждая точно так же, как и при доказательстве теоремы 4.1, нетрудно показать, что для любой функции $r(n)$, удовлетворяющей условиям $r(n)\to\infty$, $\ln r(n)=o(\ln n)$,

$$\nu_n\left\{\frac{(\ln m)_r-\ln r}{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln r}<x\right\},\quad \nu_n\left\{\frac{(\ln^* m)_r-\ln r}{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln r}<x\right\}$$

стремятся к предельному закону, логарифм характеристической функции которого вычисляется по формуле (4.9) с

$$K(u)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad u\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}u^2 & \text{при} \quad 0<u\leqslant\sqrt{2},\\ 1 & \text{при} \quad u>\sqrt{2}.\end{cases}$$

С другой стороны,

$$\nu_n\left\{\frac{\ln m-\ln n}{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln n}<x\right\},\quad \nu_n\left\{\frac{\ln^* m-\ln n}{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln n}<x\right\}$$

стремятся к 0 при $x<0$ и к 1 при $x>0$. Легко доказывается, что никакая нормировка в случае функций $\ln m$ и $\ln^* m$ не может привести к предельному собственному закону распределения.

Можно показать, что для функций класса H

$$\ln B(n) = o(\ln \ln n).$$

В самом деле, пусть функция $B(n)$ удовлетворяет условиям

$$B(n) \to \infty, \quad \frac{B\bigl(r(n)\bigr)}{B(n)} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $r(n)$ — неубывающая функция,

$$r(n) \to \infty, \quad \frac{\ln r(n)}{\ln n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое положительное число. Не ограничивая общности рассуждений, можно положить, что $\varepsilon < \frac{1}{10}$. Найдется такое число $n_0 = n_0(\varepsilon) > 100$, что для всех $n \geqslant n_0$

$$r(n) < n^{\varepsilon}, \quad B(n) < B\bigl(r(n)\bigr)(1+\varepsilon)$$

и

$$\ln B(n_0) < \varepsilon \ln \ln n$$

при $n \geqslant n_1(\varepsilon) \geqslant n_0$. Введем обозначения

$$r_1(n) = r(n);$$

$$r_l(n) = r\bigl([r_{l-1}(n)]\bigr), \qquad l = 2,\ 3,\ \ldots.$$

Для всякого n подберем число $k = k(n)$ такое, чтобы

$$r_{k-1}(n) \geqslant n_0 \geqslant r_k(n).$$

Тогда имеем:

$$B(n) < B\bigl(r(n)\bigr)(1+\varepsilon),$$

$$B\bigl(r_1(n)\bigr) < B\bigl(r_2(n)\bigr)(1+\varepsilon),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B\bigl(r_{k-1}(n)\bigr) < B\bigl(r_k(n)\bigr)(1+\varepsilon),$$

откуда следует неравенство

$$B(n) < B\bigl(r_k(n)\bigr)(1+\varepsilon)^k \leqslant B(n_0)(1+\varepsilon)^k.$$

С другой стороны,

$$r(n) < n^{\varepsilon},$$
$$r_2(n) < r_1^{\varepsilon}(n),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{k-1}(n) < r_{k-2}^{\varepsilon}(n).$$

Отсюда

$$r_{k-1}(n) < n^{\varepsilon^{k-1}}, \quad n_0 < n^{\varepsilon^{k-1}},$$
$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} < \frac{\ln n}{\ln n_0} < \ln n, \quad k < \frac{\ln \ln n}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} + 1 < \ln \ln n.$$

Таким образом,

$$B(n) < B(n_0)(1+\varepsilon)^{\ln \ln n},$$
$$\frac{\ln B(n)}{\ln \ln n} < \frac{\ln B(n_0)}{\ln \ln n} + \ln(1+\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε

$$\frac{\ln B(n)}{\ln \ln n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы 4.1 мы пользовались предельной теоремой для сумм независимых случайных величин, которая, как известно, доказывается с помощью характеристических функций. Можно, однако, как уже отмечалось в § 2, и непосредственно применить метод характеристических функций. Наметим коротко ход доказательства.

Лемма 4.7. *Для любого вещественного* x

$$e^{ix} = \sum_{l=0}^{k} \frac{(ix)^l}{l!} + \frac{\Theta |x|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

где $|\Theta| \leqslant 1$.

Доказательство. Лемму докажем лишь для $x \geqslant 0$. Для $x < 0$ доказательство аналогично. Заметим, что

$$\int_0^x e^{iu}\, du = \frac{1}{i}(e^{ix} - 1);$$

отсюда

$$|e^{ix}-1|\leqslant\int\limits_0^x du=x,$$

что доказывает лемму для $k=0$. Предположим, что она верна для $k=m\geqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_0^x\left(e^{iu}-\sum_{l=0}^{m}\frac{(iu)^l}{l!}\right)du=\frac{1}{i}\left(e^{ix}-1-\sum_{l=0}^{m}\frac{(ix)^{l+1}}{(l+1)!}\right),$$

и в силу предположения

$$\left|e^{ix}-\sum_{l=0}^{m+1}\frac{(ix)^l}{l!}\right|\leqslant\int\limits_0^x\left|e^{iu}-\sum_{l=0}^{m}\frac{(iu)^l}{l!}\right|du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{m!}\int\limits_0^x u^m\,du=\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

По принципу математической индукции лемма справедлива для всех $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Пусть сильно аддитивная функция $f(m)\in H$, $r=r(n)$ — соответствующая функция. Характеристическая функция $\varphi_n(t)$ закона

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}<x\right\}$$

равна

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp\left\{it\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}\right\}. \tag{4.23}$$

Выражения

$$\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}\quad\text{и}\quad\frac{f(m)_r-A(r)}{B(r)}$$

для всех $m\leqslant n$, за исключением лишь $o(n)$ чисел, отличаются друг от друга на величину $o(1)$. Следовательно,

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp\left\{it\frac{f(m)_r-A(r)}{B(r)}\right\}+o(1).$$

Применение лемм 1.2 и 1.6 аналогично § 2 приводит нас к соотношению

$$\varphi_n(t)=\psi_n(t)+o(1),$$

где

$$\psi_n(t)=\prod_{p\leqslant r} e^{-it\frac{f(p)}{pB(r)}}\left(1-\frac{1-e^{it\frac{f(p)}{B(r)}}}{p}\right).$$

Имеем, что $\psi_n(0)=1$. Для достаточно больших $n>n_0(t)$ функция $\psi_n(t)\neq 0$. Логарифмируя обе части, получаем:

$$\ln\psi_n(t)=\sum_{p\leqslant r}\left\{-it\frac{f(p)}{pB(r)}+\ln\left(1-\frac{1-e^{it\frac{f(p)}{B(r)}}}{p}\right)\right\}=$$

$$=\sum_{p\leqslant r}\left\{\frac{e^{it\frac{f(p)}{B(r)}}-1}{p}-it\frac{f(p)}{pB(r)}+B\frac{\left|1-e^{it\frac{f(p)}{B(r)}}\right|^2}{p^2}\right\}.$$

Согласно леммам 4.3, 4.7

$$\sum_{p\leqslant r}\frac{1}{p^2}\left|1-e^{it\frac{f(p)}{B(r)}}\right|^2\leqslant\frac{t^2}{B^2(r)}\sum_{p\leqslant r}\frac{f^2(p)}{p^2}=o(1).$$

Это приводит к равенству

$$\ln\psi_n(t)=\sum_{p\leqslant r}\frac{1}{p}\left(e^{it\frac{f(p)}{p}}-1-it\frac{f(p)}{B(r)}\right)+o(1)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\frac{1}{u^2}\,dK_n(u)+o(1),$$

где оценка $o(1)$ равномерна при $|t|\leqslant T$ и

$$K_n(u)=\frac{1}{B^2(r)}\sum_{\substack{p\leqslant r\\ f(p)<uB(r)}}\frac{f^2(p)}{p}.$$

Остается применить предельные теоремы для характеристических функций безгранично делимых законов.

Таким путем можно получить асимптотические формулы для тригонометрических сумм вида (4.23). Так, например,

$$\sum_{m=1}^{n} \exp\left\{ it\, \frac{\omega(m) - \ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} \right\} \sim n e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Помимо изложенных выше методов доказательства интегральных предельных теорем для арифметических функций, могут быть использованы и другие методы, употребляемые в теории вероятностей для аналогичных задач. Из них мы упомянем метод моментов, который до сих пор применялся лишь в случае нормального предельного распределения. Он состоит в следующем.

Пусть

$$F_n(x) = \nu_n\left\{ \frac{f(m) - A(n)}{B(n)} < x \right\},$$

$$\mu_k(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF_n(x) = \frac{1}{nB^k(n)} \sum_{m=1}^{n} \bigl(f(m) - A(n)\bigr)^k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если при $n \to \infty$ и любом фиксированном k момент $\mu_k(n)$ стремится к

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ нечётном,} \\ (k-1)!! & \text{при } k \text{ чётном,} \end{cases}$$

то тогда, как известно, $F_n(x)$ стремится к нормальной функции распределения $G(x)$. Разумеется, для функций класса H вместо функций $f(m)$ можно рассматривать „урезанные“ функции $\bar{f}(m)$.

Этот метод впервые применялся Г. Делянжем [45] к функции $\omega(m)$. Г. Хальберстаму и Г. Делянжу [67, 68, 46, 52] затем удалось распространить метод моментов на более широкий класс аддитивных арифметических функций. Наиболее общий результат принадлежит Э. Вилкасу [10], доказавшему теорему 4.2 методом моментов.

Заметим еще, что развиваемый в этой книжке метод позволяет рассматривать не только аддитивные арифметические функции $f(m)$ класса H, для которых ряд

$$\sum_p \frac{f^2(p)}{p}$$

расходится, но и класс функций, для которых этот ряд сходится.

Покажем, что в этом случае закон распределения

$$\nu_n\left\{f(m)-A(n)<x\right\}$$

всегда сходится к предельному. В самом деле, из результатов § 3 имеем, что

$$\nu_n\left\{\left|\left(f(m)-A(n)\right)-\left(f(m)_r-A(r)\right)\right|>\varepsilon\right\}=\frac{B}{\varepsilon^2}\left(B^2(n)-B^2(r)\right)\to 0$$

при $n\to\infty$, если $r=r(n)<n$, где $r(n)$ стремится к бесконечности сколь угодно медленно. В силу леммы 4.1 заключаем, что предельные законы для

$$\nu_n\left\{f(m)-A(n)<x\right\} \quad \text{и} \quad \nu_n\left\{f(m)_r-A(r)<x\right\}$$

существуют лишь одновременно и в случае существования совпадают. Далее, согласно § 2,

$$\nu_n\left\{f(m)_r-A(r)<x\right\}=P\left\{\sum_{p\leqslant r}\xi_p-A(r)<x\right\}+o(1),$$

где $P\{\ldots\}$ означает вероятность события, указанного в скобках, а ξ_p — независимые случайные величины, принимающие значения $f(p^\alpha)$ $(\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma_p)$ с вероятностями $\pi(p^\alpha)$ соответственно. Характеристическая функция $\psi_r(t)$ закона

$$P\left\{\sum_{p\leqslant r}\xi_p-A(r)<x\right\}$$

равна

$$\psi_r(t)=\prod_p\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p}\pi(p^\alpha)\exp\left\{it\left(f(p^\alpha)-\frac{f(p)}{p}\right)\right\}.$$

Так как

$$\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p} \pi(p^\alpha)\exp\left\{it\left(f(p^\alpha)-\frac{f(p)}{p}\right)\right\}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\left(-it\,\frac{f(p)}{p}\right)+\frac{1}{p}\exp\left\{itf(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}+\frac{B}{p^2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-it\,\frac{f(p)}{p}+\frac{Bt^2f^2(p)}{p^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{p}\left\{1+itf(p)\left(1-\frac{1}{p}\right)+Bt^2f^2(p)\right\}+\frac{B}{p^2}=$$

$$=1+\frac{Bt^2f^2(p)}{p}+\frac{B}{p^2},$$

то $\psi_r(t)$ стремится к пределу равномерно в каждом конечном интервале значений t, $|t|\leqslant T$. Следовательно, предельный закон для

$$\nu_n\left\{f(m)-A(n)<x\right\}$$

существует и его характеристическая функция равна

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right)e^{-it\,\frac{f(p)}{p}}.$$

Если помимо сходимости ряда

$$\sum_p \frac{f^2(p)}{p}$$

сходится и ряд

$$\sum_p \frac{f(p)}{p},$$

то в силу леммы 4.1 закон

$$\nu_n\{f(m)<x\}$$

сходится к предельному с характеристической функцией

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right).$$

Из известной теоремы Б. Йессена и А. Винтнера ([65], стр. 28) следует, что в этих случаях предельный закон является или дискретным, или сингулярным, или абсолютно непрерывным. Из теоремы П. Леви ([65], стр. 28) имеем что он является дискретным, если ряд

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p}$$

сходится, и непрерывным, если этот ряд расходится. Дальнейшее развитие изложенного здесь метода приводит к довольно простому доказательству упомянутой на стр. 15 теоремы П. Эрдёша и А. Винтнера [64].

В заключение приведем без доказательства две интегральные теоремы о распределении суперпозиции аддитивной арифметической функции и полинома с целыми коэффициентами [5,33].

Теорема 4.4. *В обозначениях теоремы* 3.3 *и при условии* $B_R(n)\to\infty$, $\max_{p\leqslant n}|f(p)|=o\left(B_R(n)\right)$

$$\nu_n\left\{\frac{f\left(R(m)\right)-A_R(n)}{B_R(n)}<x\right\}\to G(x)$$

при $n\to\infty$.

Теорема 4.5. *В условиях теоремы* 4.4 *число простых чисел* $p\leqslant n$, *удовлетворяющих неравенству*

$$f\left(R(p)\right)-A_R(n)<xB_R(n),$$

равно

$$\frac{n}{\ln n}\left\{G(x)+o(1)\right\}$$

при $n\to\infty$.

Равномерное распределение mod 1. Метод характеристических функций позволит нам доказать следующую теорему, доказанную впервые П. Эрдёшом [57] другим методом, об асимптотически равномерном распределении дробных долей некоторого класса функций.

Для её доказательства нам потребуется известная теорема Г. Вейля [95, 41], утверждающая, что последовательность $h(m)$ асимптотически равномерно распределена mod 1, если

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{ikh(m)}\to 0$$

при $n\to\infty$ для всех $k=1, 2, \ldots$

Теорема 4.6. *Пусть $f(m)$ — вещественная сильно аддитивная арифметическая функция, удовлетворяющая условиям*

$$B(n)\to\infty \quad \textit{при} \quad n\to\infty, \quad f(p)\to 0 \quad \textit{при} \quad p\to\infty. \tag{4.24}$$

Тогда функция $f(m)$ асимптотически равномерно распределена по модулю 1.

Доказательство. Согласно теореме Вейля нам достаточно показать, что для всякого вещественного $t\neq 0$

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{itf(m)}\to 0 \tag{4.25}$$

при $n\to\infty$. Мы можем ограничиться рассмотрением суммы

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{if(m)}.$$

Действительно, если мы покажем, что $S_n\to 0$ при $n\to\infty$ для любой функции $f(m)$, удовлетворяющей условиям (4.24), то отсюда будет следовать и соотношение (4.25), так как сильно аддитивная функция $tf(m)$ для всякого $t\neq 0$ также удовлетворяет условиям (4.24).

Пусть $\psi(u)$ $(u\geqslant 1)$ — строго монотонная функция, стремящаяся к ∞ при $u\to\infty$ достаточно медленно. Обозначим через $r=r(n)$ решение уравнения

$$n=r^{\psi(r)}.$$

Имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} |f(m)-f(m)_r| \leqslant \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{p\mid m\\ p>r}} |f(p)| \leqslant \sum_{r<p\leqslant n}\left[\frac{n}{p}\right]|f(p)| \leqslant$$

$$\leqslant n\sum_{r<p\leqslant n}\frac{|f(p)|}{p} = Bn\max_{p>r}|f(p)|\ln\psi(r).$$

Но

$$\max_{p>r} |f(p)| \ln \psi(r) \to 0$$

при $r\to\infty$, если $\psi(r)$ достаточно медленно растущая функция. Отсюда следует, что для всех $m\leqslant n$, за исключением $o(n)$ чисел, $f(m)$ и $f(m)_r$ отличаются лишь на величину порядка $o(1)$. Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{if(m)_r}+o(1).$$

Пусть теперь $F_n(x)$ — функция распределения суммы независимых случайных величин

$$\sum_{p\leqslant r}\xi_p,$$

где ξ_p принимает значения $f(p)$ и 0 с вероятностями $1/p$ и $1-1/p$ соответственно. Согласно результатам § 2

$$\nu_n\{f(m)_r<x\}-F_n(x)=o(1),$$

где оценка равномерна по x. Поэтому

$$S_n=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}d\nu_n\{f(m)_r<x\}+o(1)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}dF_n(x)+o(1).$$

В силу независимости ξ_p отсюда получаем, что

$$S_n=\prod_{p\leqslant r}\left(1+\frac{e^{if(p)}-1}{p}\right)+o(1).$$

Далее,

$$|S_n|\leqslant\prod_{p\leqslant r}\left|1+\frac{e^{if(p)}-1}{p}\right|+o(1)=$$

$$=\prod_{p\leqslant r}\left(1-\frac{4}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sin^2\frac{f(p)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+o(1).$$

Так как $f(p)\to 0$ при $p\to\infty$, то при достаточно большом n_0

$$|S_n|\leqslant\left\{\prod_{n_0<p\leqslant r}\left(1-c_{34}\frac{f^2(p)}{p}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}+o(1),$$

где c_{34} — положительное постоянное, не зависящее от n. Однако $B(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, $S_n = o(1)$, что и требовалось доказать.

Условия (4.24), очевидно, можно ослабить, заменив следующими:

$$\{f(p)\} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty, \quad \sum_p \frac{\{f(p)\}^2}{p} = \infty,$$

где $\{x\}$ означает дробную часть x.

Локальные теоремы. Методы, развиваемые в этой книге, позволяют доказывать и локальные предельные теоремы для некоторого класса аддитивных арифметических функций.

Теорема 4.7. *Пусть $f(m)$ — аддитивная арифметическая функция, принимающая лишь целые значения и удовлетворяющая условию $f(p) = 0$ для всех простых p. Тогда для любого целого k*

$$\nu_n\{f(m) = k\} = \lambda_k + \frac{B \ln\ln n}{\ln n}$$

равномерно по k, где $\lambda_k = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n\{f(m) = k\}$ можно определить из соотношения

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right), \qquad (4.26)$$

причем ряд и произведение сходятся для всех вещественных t.

Доказательство. Положим $r = \exp\left(c_{35} \frac{\ln n}{\ln\ln n}\right)$, где $c_{35} = \min\left(1,\ c_9,\ c_{30}\right)$. Рассмотрим характеристическую функцию

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{itf(m)}$$

закона распределения $\nu_n\{f(m) < x\}$, где t — вещественное число.

При $m \leqslant n$ имеем, что

$$f(m)-f(m)_r=\sum_{r<p\leqslant n} f\left(p^{\alpha_p(m)}\right)+\sum_{p\leqslant r}\left\{f\left(p^{\alpha_p(m)}\right)-f\left(p^{\beta_p(m)}\right)\right\}=$$

$$=\sum_{\substack{p^\alpha \| m\\ r<p\leqslant n}} f(p^\alpha)+\sum_{\substack{p^\alpha \| m\\ p\leqslant r,\ p^\alpha>r}}\left\{f(p^\alpha)-f\left(p^{\gamma_p}\right)\right\}.$$

Из этого тождества и условия $f(p)=0$ следует, что при $m \leqslant n$ функция $f(m)$ может отличаться от функции $f(m)_r$ лишь для m, делящихся на хотя бы один квадрат простых чисел $p>r$ или на степень $p^\alpha>r$ простых чисел $p\leqslant r$. Число таких $m\leqslant n$ не превосходит

$$\sum_{p>r}\frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p\leqslant r\\ p^\alpha>r}}\frac{n}{p^\alpha}=\frac{Bn}{r}+n\sum_{\substack{p\leqslant r\\ \alpha>\gamma_p}}\frac{1}{p^\alpha}=Bn\left(\frac{1}{r}+\sum_{p\leqslant r}\frac{1}{p^{\gamma_p+1}}\right)=$$

$$=\frac{Bn}{r}\left(1+\sum_{p\leqslant r}\frac{1}{p}\right)=\frac{Bn}{r}\ln\ln r$$

согласно (1.3).

Поэтому ошибка, которую мы совершим заменив в сумме $\varphi_n(t)$ функцию $f(m)$ через $f(m)_r$, равна $B\ln\ln r/r$, и мы имеем:

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{itf(m)_r}+\frac{B}{r}\ln\ln r.$$

Здесь и в дальнейшем оценки равномерны по t.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 4.6, мы получаем, что сумма в правой части последнего равенства лишь на величину $B\exp\left(-c_{36}\frac{\ln n}{\ln r}\right)$, $c_{36}=\min(c_9, c_{30})$, отличается от произведения характеристических функций случайных величин $\xi_p\,(p\leqslant r)$, где ξ_p принимает значения $f(p^\alpha)$ с вероятностями $\pi(p^\alpha)$ $(\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma_p)$. Следовательно,

$$\varphi_n(t)=\prod_{p\leqslant r}\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p}\pi(p^\alpha)\,e^{itf(p^\alpha)}+\frac{B}{\ln n}.$$

Для сокращения записи обозначим

$$\psi_p(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \rho(p^\alpha) e^{itf(p^\alpha)} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right).$$

Так как

$$|\psi_p(t)| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{\infty} \rho(p^\alpha) = 1$$

и

$$\psi_p(t) - \sum_{\alpha=0}^{\gamma_p} \pi(p^\alpha) e^{itf(p^\alpha)} = B \sum_{\alpha > \gamma_p} \frac{1}{p^\alpha} = \frac{B}{p^{\gamma_p+1}} = \frac{B}{r},$$

причем оценка равномерна по p и t, то

$$\varphi_n(t) = \prod_{p \leqslant r} \left\{ \psi_p(t) + \frac{B}{r} \right\} + \frac{B}{\ln n} =$$

$$= \prod_{p \leqslant r} \psi_p(t) + B \left| \left(1 + \frac{B}{r}\right)^{\pi(r)} - 1 \right| + \frac{B}{\ln n},$$

где $\pi(r)$ – число простых чисел, не превосходящих r.

Согласно (1.1) находим:

$$\left(1 + \frac{B}{r}\right)^{\pi(r)} - 1 = \exp\left\{ \pi(r) \ln\left(1 + \frac{B}{r}\right) \right\} - 1 =$$

$$= \exp\left(\frac{B}{\ln r}\right) - 1 = \frac{B}{\ln r}.$$

Таким образом,

$$\varphi_n(t) = \prod_{p \leqslant r} \psi_p(t) + \frac{B}{\ln r}.$$

Распространим последнее произведение на все p. Из оценки

$$\ln \prod_{p > r} \psi_p(t) = \sum_{p > r} \ln\left(1 + \frac{B}{p^2}\right) = B \sum_{p > r} \frac{1}{p^2} = \frac{B}{r}$$

следует, что

$$\varphi_n(t) = \prod_{p} \psi_p(t) + \frac{B}{\ln r}. \tag{4.27}$$

С другой стороны,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu_n \left\{ f(m) = k \right\} e^{itk}.$$

Отсюда

$$\nu_n\left\{f(m)=k\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\,e^{-ikt}\,dt,$$

или в силу (4.27)

$$\nu_n\left\{f(m)=k\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_p\psi_p(t)\,e^{-ikt}\,dt+\frac{B}{\ln r}.$$

Таким образом, предел

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\left\{f(m)=k\right\}=\lambda_k$$

существует и

$$\nu_n\left\{f(m)=k\right\}=\lambda_k+\frac{B}{\ln r}=\lambda_k+\frac{B\ln\ln n}{\ln n}.$$

Из сказанного имеем также, что справедливо (4.26).

Частный случай теоремы 4.5 для функции $\Omega(m)-\omega(m)$ был получен А. Реньи [84, 73]. В этом случае

$$\Omega(p^\alpha)-\omega(p^\alpha)=\alpha-1 \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k e^{itk}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-e^{it}}\right).$$

Выведем для чисел λ_k в этом случае асимптотические формулы. Перенумеруем все простые числа в порядке их возрастания: $p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ \ldots$ Функция

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k z^k=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-z}\right) \tag{4.28}$$

является мероморфной с простыми полюсами в точках $z=p$. Вычет относительно полюса p_j

$$A_j=-\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\prod_{p\neq p_j}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-p_j}\right).$$

Следовательно, $H(z)$ можно представить в виде

$$H(z)=\sum_{j=1}^{l}\frac{A_j}{z-p_j}+R_l(z),$$

где

$$R_l(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k .$$

и радиус сходимости этого ряда равен p_{l+1}. Согласно теореме Коши—Адамара

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|b_k|}=\frac{1}{p_{l+1}},$$

или

$$|b_k|<\frac{(1+\varepsilon)^k}{p_{l+1}^k},$$

где $\varepsilon>0$ — любое число, при $k>k_0(\varepsilon)$. При $|z|<2$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\sum_{j=1}^{l}\frac{A_j}{p_j^{k+1}}+b_k\right)z^k,$$

откуда

$$\lambda_k=-\sum_{j=1}^{l}\frac{A_j}{p_j^{k+1}}+b_k,$$

или

$$\lambda_k=\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j^{k+1}}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\prod_{p\neq p_j}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-p_j}\right)+$$
$$+\frac{B(1+\varepsilon)^k}{p_{l+1}^k},$$

где величина B ограничена константой, зависящей только от ε.

В частности,

$$\lambda_k=\frac{1}{2^{k+2}}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-2}\right)+\frac{B(1+\varepsilon)^k}{3^k}.$$

Значения λ_k можно подсчитать непосредственно из (4.28):

$$\lambda_0=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{6}{\pi^2},$$

$$\lambda_1=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\sum_p\frac{1}{p(p+1)}=$$
$$=\frac{6}{\pi^2}\sum_p\frac{1}{p(p+1)},$$

$$\lambda_2 = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(\sum_p \frac{1}{p^2(p+1)} + \sum_{p<q} \frac{1}{pq(p+1)(q+1)}\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\left(\sum_p \frac{1}{p^2(p+1)} + \sum_{p<q} \frac{1}{pq(p+1)(q+1)}\right).$$

λ_0 означает асимптотическую плотность бесквадратных чисел; λ_1 — асимптотическую плотность чисел вида $p^2 l$, где l — бесквадратное число, взаимно простое с p.

Метод доказательства теоремы 4.7 не применим к любым аддитивным функциям $f(m)$, принимающим целые значения, однако её можно обобщить на функции с условием, что $f(p) \neq 0$ для сравнительно небольшого количества p. Имеет место

Теорема 4.8. *Если аддитивная арифметическая функция $f(m)$ принимает лишь целые значения, $f(p)=0$ для всех простых p, за исключением множества простых чисел Q, удовлетворяющего условию*

$$\sum_{p\in Q} \frac{1}{p} < \infty,$$

то для любого целого k существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n \left\{ f(m) = k \right\} = \lambda_k,$$

где λ_k можно определить из соотношения

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p}\right),$$

причем ряд и произведение сходятся для всех вещественных t.

Эту теорему можно распространить на функции, принимающие значения из любой арифметической прогрессии.

то „коэффициент корреляции“ функций $f_j(m+a_j)$, $f_l(m+a_l)$ $(j \neq l)$ на отрезке натурального ряда $\{1, \ldots, n\}$ согласно лемме 4.4 равен

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} x_1 x_2\, d_2 F_{njl}(x_1, x_2) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{nj}(x)\cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{nl}(x)}{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nj}(x) - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{nj}(x)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nl}(x) - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{nl}(x)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_j(m+a_j) f_l(m+a_l) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_j(m+a_j)\cdot\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_l(m+a_l)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_j^2(m+a_j) - \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_j(m+a_j)\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_l^2(m+a_l) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f_l(m+a_l)\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{o\left(B_j(n) B_l(n)\right)}{B_j(n) B_l(n)\left(1+o(1)\right)} = o(1),$$

так что функции $f_j(m+a_j)$ $(j=1, \ldots, s)$ попарно асимптотически некоррелированны в известном смысле. Как видно из доказательства леммы 4.4, это утверждение является следствием того, что числа $m+a_j$ и $m+a_l$ $(j \neq l)$ могут делиться одновременно лишь на те простые числа, которые входят в $a_j - a_l$. Оказывается, однако, что мы можем утверждать и несколько больше: если существуют асимптотические законы $F_j(x)$ для

$$\nu_n\left\{\frac{f_j(m) - A_j(n)}{B_j(n)} < x\right\},$$

то тогда существует асимптотический закон и для (5.1) и равен свертке $F_1(x) * \ldots * F_s(x)$. Мы можем, таким образом, говорить об асимптотической независимости функций $f_j(m+a_j)$ $(j=1, \ldots, s)$.

Изучение сумм аддитивных функций со „сдвинутыми“ аргументами будет также опираться на их теоретико-вероятностную интерпретацию. Мы будем пользоваться следующим полем вероятностей.

Пусть $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — любые вещественные сильно аддитивные арифметические функции; n_0 — фиксированное число, бо́льшее s и простых делителей чисел $a_j - a_l$ ($j, l = 1, \ldots, s$; $j \neq l$); $r = r(n)$ — функция, удовлетворяющая условиям $r \geqslant n_0$, $\ln r \leqslant c_{13} \ln n$, где c_{13} — достаточно малая постоянная. Через q будем обозначать простые числа, подчиненные условиям $n_0 \leqslant q \leqslant r$. Пусть $E = \{1, \ldots, n\}$; $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ — упорядоченная система чисел, которые либо все равны 0, либо одно равно 1, а все остальные 0. Для любого q и любой возможной системы чисел $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ обозначим через $E_q(\delta_1, \ldots, \delta_s)$ множество чисел, состоящее из тех $m \leqslant n$, для которых $\delta_q(m + a_j) = \delta_j$ ($j = 1, \ldots, s$). Наименьшая алгебра множеств $\mathfrak{F}$, содержащая все $E_q(\delta_1, \ldots, \delta_s)$, совместно с функцией множества $\nu_n\{m \in A\}$ образует конечное поле вероятностей, относительно которого функции

$$\sum_{j=1}^{s} f_j^{(q)}(m + a_j)$$

являются случайными величинами.

Заметим, что сумма

$$\bigcup E_q(\delta_1, \ldots, \delta_s)$$

по всем $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ равна E и для двух различных систем чисел $\{\delta_1', \ldots, \delta_s'\}$ и $\{\delta_1'', \ldots, \delta_s''\}$ множества $E_q(\delta_1', \ldots, \delta_s')$ и $E_q(\delta_1'', \ldots, \delta_s'')$ не пересекаются. Поэтому любое множество алгебры $\mathfrak{F}$ можно представить как сумму множеств вида

$$A(k_1, \ldots, k_s) = \bigcap_q E_q(\delta_1^{(q)}, \ldots, \delta_s^{(q)}),$$

где пересечение берется по всем q и

$$k_j = \prod_q q^{\delta_j^{(q)}} \qquad (j = 1, \ldots, s),$$

причем, очевидно, числа k_j попарно взаимно просты.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ СУММ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Линейная комбинация аддитивных арифметических функций $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ обладает, очевидно, свойством аддитивности. Поэтому предельное поведение функции распределения её значений на множестве $\{1, \ldots, n\}$ при $n \to \infty$ и при выполнении соответствующих условий можно изучать путем непосредственного обобщения соображений, изложенных в § 4. Бо́льший интерес представляет рассмотрение линейной комбинации аддитивных функций со „сдвинутыми" аргументами $f_1(m+a_1), \ldots, f_s(m+a_s)$, где $a_1, \ldots, a_s$ различные между собой целые неотрицательные числа. Если функции $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ не равны тождественно нулю, то при $s \geqslant 1$ такая линейная комбинация не является аддитивной арифметической функцией. Однако методы §§ 1—4 пригодны для изучения асимптотического распределения её значений.

Мы будем заниматься законами распределения

$$\nu_n\left\{\frac{f_1(m+a_1)-A_1(n)}{B_1(n)}+\ldots+\frac{f_s(m+a_s)-A_s(n)}{B_s(n)}<x\right\}, \tag{5.1}$$

где $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — сильно аддитивные функции из класса H. Требование сильной аддитивности при тех же условиях, как и в § 4, не нарушает общности. Предварительно сделаем следующие замечания. Если

$$F_{nj}(x)=\nu_n\{f_j(m+a_j)<x\},$$

$$F_{njl}(x_1, x_2)=\nu_n\left\{f_j(m+a_j)<x_1,\ f_l(m+a_l)<x_2\right\},$$

Подсчитаем частоту ν_n для множества

$$A = \bigcup{}' A(k_1, \ldots, k_s),$$

где сумма берется по некоторым возможным системам $\{k_1, \ldots, k_s\}$. Так как любые два множества $A(k_1, \ldots, k_s)$ не имеют общих элементов, то

$$\nu_n\{m \in A\} = \sum{}' \nu_n\left\{m \in A(k_1, \ldots, k_s)\right\}.$$

Здесь и в дальнейшем штрих имеет прежнее значение. Если $k_1 \ldots k_s < \sqrt{n}$, то согласно лемме 1.6

$$\nu_n\left\{m \in A(k_1, \ldots, k_s)\right\} = \prod_q \eta_q(k_1 \ldots k_s) \cdot (1 + BR).$$

где

$$R = \exp\left(-c_{36}\frac{\ln n}{\ln r}\right), \quad c_{36} = \min(c_9, c_{30}).$$

Согласно лемме 1.2

$$\sum_{k_1 \ldots k_s \geqslant \sqrt{n}}{}' \nu_n\left\{m \in A(k_1, \ldots, k_s)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \nu_n\left\{\bigcup_{k_1 \ldots k_s \geqslant \sqrt{n}} A(k_1, \ldots, k_s)\right\} = BR$$

причем оценка равномерна по $A \in \mathfrak{F}$.

Таким образом,

$$\nu_n\{m \in A\} = \sum_{k_1 \ldots k_s < \sqrt{n}}{}' \prod_q \eta_q(k_1 \ldots k_s) \cdot (1 + BR) + BR.$$

Из леммы 1.6 следует, что

$$\prod_q \eta_q(k_1 \ldots k_s)$$

представляет собою асимптотическую плотность множества целых положительных чисел m, удовлетворяющих условиям $\delta_q(m + a_1) = \delta_q(k_1), \ldots, \delta_q(m + a_s) = \delta_q(k_s)$ для всех q. Таким образом, сумма

$$\sum_{k_1 \ldots k_s \geqslant \sqrt{n}} \prod_q \eta_q(k_1 \ldots k_s)$$

равна асимптотической плотности множества целых положительных чисел m, удовлетворяющих условиям $\delta_q(m+a_1)=\delta_q(k_1)$. ..., $\delta_q(m+a_s)=\delta_q(k_s)$ для всех q и хотя бы одной системы $\{k_1, \ldots, k_s\}$ с $k_1 \ldots k_s \geqslant \sqrt{n}$. Согласно лемме 1.2 эта плотность равна BR. Из всего сказанного заключаем, что

$$\nu_n\{m\in A\}=\sum{}' \prod_q \eta_q(k_1 \ldots k_s)+BR,$$

где оценка BR равномерна по всем $A\in\mathfrak{F}$.

Легко убедиться, что сумма по всем возможным $k_1, \ldots, k_s$

$$\sum_{k_1,\ldots,k_s} \prod_q \eta_q(k_1 \ldots k_s)$$

равна

$$\prod_q \left\{\left(1-\frac{s}{q}\right)+s\cdot\frac{1}{q}\right\}=1.$$

Введем теперь для всех множеств A системы $\mathfrak{F}$ другую вероятностную меру

$$P(A)=\sum{}' \prod_q \eta_q(k_1 \ldots k_s),$$

если

$$A=\bigcup{}' A(k_1, \ldots, k_s).$$

Тогда равномерно по всем $A\in\mathfrak{F}$

$$\nu_n\{m\in A\}-P(A)=BR.$$

Определим относительно меры P случайные величины $\xi_q=\xi_q(m)$, полагая, что

$$\xi_q(m)=\sum_{j=1}^{s} f_j^{(q)}(m+a_j).$$

Случайная величина ξ_q принимает значения

0 с вероятностью $1-\frac{s}{q}$,

$f_j(q)$ $(j=1, \ldots, s)$ с вероятностями $\frac{1}{q}$.

При этом, как легко сообразить, совместное распределение случайных величин ξ_q равно произведению по q одномерных распределений случайных величин ξ_q. Распределение относительно меры ν_n случайной величины

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{q} f_j^{(q)} (m + a_j)$$

лишь на величину BR отличается от распределения относительно P суммы независимых случайных величин

$$\sum_{q} \xi_q.$$

Заметим еще, что дисперсия закона (5.1) для функций $f_j(m) \in H$ равна

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{f_j(m+a_j)}{B_j(n)} \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j(m+a_j)}{B_j(n)} \right)^2 =$$

$$= \sum_{j,\, l=1}^{s} \frac{1}{B_j(n) B_l(n)} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f_j(m+a_j) f_l(m+a_l) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f_j(m+a_j) \cdot \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f_l(m+a_l) \right) = s + o(1) \qquad (5.2)$$

согласно лемме 4.4.

Теорема 5.1. *Пусть $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — сильно аддитивные арифметические функции из класса H; $a_1, \ldots, a_s$ — различные между собою фиксированные целые неотрицательные числа. Для того чтобы закон распределения* (5.1) *сходился при $n \to \infty$ к предельному с дисперсией s, необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая функция $K(u)$ с вариацией s такая, что при $n \to \infty$ во всех её точках непрерывности*

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j^2(n)} \sum_{\substack{p \leq n \\ f_j(p) < uB_j(n)}} \frac{f_j^2(p)}{p} \to K(u).$$

Логарифм характеристической функции предельного закона определяется формулой (4.9).

Доказательство. Из определения класса H следует существование функций $r_j=r_j(n)$ ($j=1, \ldots, s$) таких, что $B_j(r_j)/B_j(n)\to 1$ и $\ln r_j/\ln n\to 0$ при $n\to\infty$. Положим

$$r=r(n)=\max_{1\leqslant j\leqslant s} r_j(n).$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{B_j(r)}{B_j(n)}\to 1 \quad (j=1, \ldots, s), \qquad \frac{\ln r}{\ln n}\to 0$$

при $n\to\infty$.

Пусть n_0 и q имеют введенные выше значения,

$$h(m)=\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(m+a_j)}{B_j(n)},$$

$$h(m)_r=\sum_{j=1}^{s}\sum_{q}\frac{f_j^{(q)}(m+a_j)}{B_j(n)}.$$

Из приведенной выше теоретико-вероятностной интерпретации следует, что равномерно по x

$$\nu_n\{h(m)_r<x\}=P\left\{\sum_q \xi_{nq}<x\right\}+o(1),$$

где ξ_{nq} — независимые случайные величины, причем ξ_{nq} принимает значения

$$0 \text{ с вероятностью } 1-\frac{s}{q},$$

$$\frac{f_j(q)}{B_j(n)} \quad (j=1, \ldots, s) \text{ с вероятностью } \frac{1}{q}.$$

Пусть $M\xi_{nq}$ — среднее значение случайной величины ξ_{nq}. Из леммы 4.2 вытекает, что

$$\sum_q M^2\xi_{nq}=\sum_q\left(\sum_{j=1}\frac{f_j(q)}{qB_j(n)}\right)^2=$$

$$=B\sum_{j=1}\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_q\frac{f_j^2(q)}{q^2}=o(1). \tag{5.3}$$

Как и в доказательстве теоремы 4.1, легко убеждаемся, что величины $\xi_{nq} - M\xi_{nq}$ равномерно предельно пренебрегаемы. Положим

$$K_n(u) = \sum_q \int_{-\infty}^{u} x^2 \, d\nu_n \{ \xi_{nq} - M\xi_{nq} < x \}.$$

Тогда на основании (5.3) равномерно по u

$$K_n(u) = \sum_{j=1}^{s} \sum_q{}' \frac{1}{q} \left(\frac{f_j(q)}{B_j(n)} - M\xi_{nq} \right)^2 + o(1),$$

где штрих указывает, что сумма берется по тем q, для которых

$$\frac{f_j(q)}{B_j(n)} - M\xi_{nq} < u.$$

В силу того же соотношения (5.3) заключаем, что $K_n(u)$ и

$$G_n(u) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{q \\ f_j(q) < uB_j(n)}} \frac{1}{q} \left(\frac{f_j(q)}{B_j(n)} - M\xi_{nq} \right)^2$$

могут сходиться лишь к одной и той же предельной функции в её точках непрерывности и при этом лишь одновременно. Положим далее

$$L_n(u) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j^2(n)} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ f_j(p) < uB_j(n)}} \frac{f_j^2(p)}{p}$$

и оценим $G_n(u) - L_n(u)$. Имеем в силу (5.3)

$$|G_n(u) - L_n(u)| \leqslant \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j^2(n)} \left(\sum_{p < n_0} \frac{f_j^2(p)}{p} + \sum_{r < p \leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{2}{B_j(n)} \sum_q \frac{f_j(q)}{q} M\xi_{nq} + \sum_q \frac{1}{q} M^2 \xi_{nq} \right) \leqslant$$

$$\leqslant o(1) + \sum_{j=1}^{s} \frac{2}{B_j(n)} \left(\sum_q \frac{f_j^2(q)}{q^2} \sum_q M^2 \xi_{nq} \right)^{\frac{1}{2}} = o(1)$$

равномерно по u. Отсюда, во-первых, следует опять, что $K_n(u)$ и $L_n(u)$ могут сходиться и притом только одновременно лишь к одной и той же предельной функции во всех её точках непрерывности. Во-вторых,

$$K_n(\infty)=G_n(\infty)+o(1)=L_n(\infty)+o(1)=s+o(1).$$

Из леммы 4.6 заключаем, что условия теоремы необходимы и достаточны для сходимости закона распределения суммы

$$\sum_q (\xi_{nq}-M\xi_{nq})$$

к предельному и его дисперсии к дисперсии предельного закона s.

Дисперсия закона $\nu_n\{h(m)<x\}$ равна $s+o(1)$ согласно (5.2). Дисперсия же закона $\nu_n\{h(m)_r<x\}$ равна

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} h^2(m)_r-\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} h(m)_r\right)^2=$$

$$=\sum_{j,l=1}^{s}\frac{1}{B_j(n)B_l(n)}\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_q f_j^{(q)}(m+a_j)\right)\left(\sum_q f_l^{(q)}(m+a_l)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_q f_j^{(q)}(m+a_j)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_q f_l^{(q)}(m+a_l)\right)\right\}.$$

Согласно лемме 4.4 это выражение равно

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_q\frac{f_j^2(q)}{q}+o(1)=s+o(1).$$

Наконец, из леммы 3.1 выводим, что

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\left(h(m)-\sum_{j=1}^{s}\frac{A_j(n)}{B_j(n)}\right)-\left(h(m)_r-\sum_q M\xi_{nq}\right)\right\}^2=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j(n)}\left\{\left(f_j(m+a_j)-\sum_q f_j^{(q)}(m+a_j)\right)-\right.\right.$$

$$-\left(A_l(n)-\sum \frac{f_l(q)}{q}\right)\Bigg\}\Bigg\}^2 = Bn\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^2(n)}\left(B^2(n)-\right.$$

$$\left.-\sum_q \frac{f_j^2(q)}{q}\right)=o(n),$$

$$\nu_n\left\{\left|\left(h(m)-\sum_{j=1}^{s}\frac{A_j(n)}{B_j(n)}\right)-\left(h(m)_r-\sum_r M\xi_{nq}\right)\right|\geqslant\varepsilon\right\}\to 1$$

при $n\to\infty$. Применение леммы 4.1 заканчивает доказательство теоремы.

Из теорем 4.1 и 5.1 видно, что для сильно аддитивных функций $f_j(m)$ $(j=1, \ldots, s)$, принадлежащих к классу H, из сходимости законов

$$\nu_n\left\{\frac{f_j(m)-A_j(n)}{B_j(n)}<x\right\} \qquad (j=1, \ldots, s)$$

к предельным законам с дисперсиями 1 и характеристическими функциями $\varphi_j(t)$ соответственно следует сходимость закона (5.1) к предельному, характеристическая функция которого равна $\varphi_1(t)\ldots\varphi_s(t)$.

Далее, из теоремы 5.1 следует, в частности, что для любого фиксированного целого положительного a и для любой сильно аддитивной функции $f(m)\in H$ необходимым и достаточным условием сходимости закона

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-f(m+a)}{B(n)}<x\right\} \tag{5.4}$$

к предельному с дисперсией 2 является существование неубывающей функции $K(u)$ с вариацией 2 такой, что во всех её точках непрерывности

$$\frac{1}{B^2(n)}\left(\sum_{\substack{p\leqslant n\\ f(p)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}+\sum_{\substack{p\leqslant n\\ -f(p)<uB(n)}}\frac{f^2(p)}{p}\right)\to K(u).$$

Логарифм предельного закона вычисляется по формуле (4.9). При этом если

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}<x\right\}$$

стремится к предельному закону с характеристической функцией $\varphi(t)$, то (5.4) тоже стремится к предельному закону, причем его характеристическая функция равна $|\varphi(t)|^2$.

Легко видеть, что если $f(m)\in H$ и $f(p)\geqslant 0$ для всех p или если $f(p)\leqslant 0$ для всех p, то законы

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-f(m+a)}{\sqrt{2}\,B(n)}<x\right\}$$

и

$$\nu_n\left\{\frac{f(m)-A(n)}{B(n)}<x\right\}$$

могут сходиться лишь одновременно к предельным законам с дисперсией 1.

Отметим частный случай теоремы 5.1.

Теорема 5.2. *Пусть, $a_1, \ldots, a_s$ — различные между собой целые неотрицательные числа; $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — сильно аддитивные вещественные арифметические функции. Если для любого $\varepsilon>0$*

$$\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |f_j(p)|>\varepsilon B_j(n)}}\frac{f_j^2(p)}{p}\to 0 \qquad (j=1, \ldots, s)$$

при $n\to\infty$, то

$$\nu_n\left\{\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(m+a_j)-A_j(n)}{\sqrt{s}\,B_j(n)}<x\right\}\to G(x)$$

при $n\to\infty$.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 5.1 точно так же, как теорема 4.2 из теоремы 4.1.

Заметим, что условие ограниченности чисел a_j в теоремах 5.1, 5.2 не являются существенными. Лемма 1.7 позволяет заменить его менее ограничительным, однако мы не будем на этом останавливаться.

Примеры. Для фиксированного целого положительного a при $n\to\infty$

$$\nu_n\left\{\frac{\omega(m)-\omega(m+a)}{\sqrt{2\ln\ln n}}<x\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\frac{\Omega(m)-\Omega(m+a)}{\sqrt{2\ln\ln n}}<x\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\frac{\Omega(m)-\omega(m+a)}{\sqrt{2\ln\ln n}}<x\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\frac{\omega_1(m)-\omega_2(m+a)}{\sqrt{\ln\ln n}}<x\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\tau_k(m+a)<k^{x\sqrt{2\ln\ln n}}\tau_k(m)\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\tau_k(m)\,\tau_k(m+a)<k^{2\ln\ln n+x\sqrt{2\ln\ln n}}\right\}\to G(x),$$

$$\nu_n\left\{\tau_k(m)<k^{\omega(m+a)+x\sqrt{2\ln\ln n}}\right\}\to G(x).$$

Теорема 5.3. *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — различные между собой фиксированные целые неотрицательные числа; $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — вещественные сильно аддитивные арифметические функции, удовлетворяющие условиям: $f_j(p)\to 0$ $(j=1, \ldots, s)$ при $p\to\infty$ и хотя бы для одного $j\,(1\leqslant j\leqslant s)$ $B_j(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда последовательность*

$$\sum_{j=1}^{s} f_j(m+a_j) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

равномерно распределена по модулю 1.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 4.6, поэтому мы ограничимся лишь изложением его основных этапов.

Обозначим через $r=r(n)$ решение уравнения

$$n=r^{\psi(r)},$$

где $\psi(u)$, $u\geqslant 1$, — монотонно неограниченно возрастающая функция, такая что

$$\psi(u)\max_{j=1,\ldots,s}\max_{p>u}|f(p)|\to 0$$

при $u\to\infty$. Тогда

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{s}f_j(m+a_j)\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{s}f_j(m+a_j)_r\right\}+o(1).$$

Пусть n_0 — введенное в начале этого параграфа число. Из лемм 1.2 и 1.6 аналогично, как и в доказательстве теоремы 4.6, получаем, что

$$S_n = \chi \prod_{n_0 \leqslant p \leqslant r} \left(1 + \frac{e^{if_1(p)} + \ldots + e^{if_s(p)} - s}{p}\right) + o(1),$$

где χ — некоторая постоянная, $|\chi| \leqslant 1$. Далее,

$$|S_n| \leqslant \prod_{n_0 < p \leqslant r} \left|1 + \frac{e^{if_1(p)} + \ldots + e^{if_s(p)} - s}{p}\right| + o(1) =$$

$$= \prod_{n_0 \leqslant p \leqslant r} \left(1 - \frac{4}{p}\left(1 - \frac{s}{p}\right) \sum_{j=1} \sin^2 \frac{f_j(p)}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{p^2} \sum_{1 \leqslant j < k < s} \sin^2 \frac{f_j(p) - f_k(p)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + o(1).$$

Но $f_j(p) \to 0$ при $p \to \infty$, следовательно, при достаточно большом n_1

$$|S_n| \leqslant \left\{ \prod_{n_1 < p \leqslant r} \left(1 - c \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j^2(p)}{p}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + o(1).$$

где c — положительное постоянное. Из условий теоремы следует, что $S_n = o(1)$. Применение теоремы Вейля завершает доказательство теоремы.

Теорема 5.4. *Пусть a — фиксированное целое положительное число, $f_1(m)$ и $f_2(m)$ — аддитивные арифметические функции, принимающие лишь целочисленные значения, причем $f_1(p) = f_2(p) = 0$ для всех простых p. Тогда для любого целого k*

$$\nu_n \left\{ f_1(m) - f_2(m+a) = k \right\} = \lambda_k + \frac{B \ln \ln n}{\ln n},$$

где λ_k определяется из соотношения

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk} = \prod_{p \mid a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=2}^{\alpha_p(a)} \frac{1}{p^\alpha} e^{it\left(f_1(p^\alpha) - f_2(p^{\alpha_j})\right)} + e^{itf_1\left(p^{\alpha_p(a)}\right)} \sum_{\alpha=\alpha_p+1}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} e^{-itf_2(p^\alpha)}\right) \times \quad (5.5)$$

$$\times \prod_{p \nmid a} \left\{ 1 - \frac{2}{p^2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} \left(e^{itf_1(p^\alpha)} + e^{-itf_2(p^\alpha)} \right) \right\},$$

причем ряд и произведение сходятся абсолютно.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.7, поэтому мы дадим лишь его набросок. Рассмотрим сумму

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{it\{f_1(m) - f_2(m+a)\}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{it\{f_1(m)_r - f_2(m+a)_r\}} + \frac{B}{r} \ln \ln r,$$

где $r = \exp\left(c_{37} \frac{\ln n}{\ln \ln n}\right)$, $c_{37} = \min(1, c_9, c_{32})$. Построим теперь соответствующее поле вероятностей. Пусть $E = \{1, \ldots, n\}$; $E_p(\alpha, \beta)$ $(p \leqslant r;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p;\ \beta = 0, 1, \ldots, \gamma_p)$ — множество целых положительных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих условиям $\beta_p(m) = \alpha$, $\beta_p(m+a) = \beta$ (это множество может быть и пустым). Обозначим через $\mathfrak{F}$ наименьшую алгебру множеств, содержащую все $E_p(\alpha, \beta)$, и введем для всех $A \in \mathfrak{F}$ меру $\nu_n\{m \in A\}$ и другую вероятностную меру $P(A)$, потребовав, чтобы значение P для всех $E_p(\alpha, \beta)$ $(p \leqslant r,\ \alpha \leqslant \gamma_p,\ \beta \leqslant \gamma_p)$ было равно асимптотической плотности целых положительных чисел m, удовлетворяющих условиям $\beta_p(m) = \alpha$, $\beta_p(m+a) = \beta$. Используя леммы 1.2, 1.7, как и в § 2, можно показать, что функция распределения $\nu_n\{f_1(m)_r - f_2(m+a)_r < x\}$ лишь на величину $B \exp\left(-c_{38} \frac{\ln n}{\ln r}\right)$ (оценка равномерна по x), $c_{38} = \min(c_9, c_{32})$, отличается от функции распределения суммы независимых случайных величин ξ_p $(p \leqslant r)$, где ξ_p определяется следующим образом. Если $p \nmid a$, то ξ_p принимает значения

0 с вероятностью $1 - \frac{2}{p}$,

$f_1(p^\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, \gamma_p)$ с вероятностями $\pi(p^\alpha)$,

$-f_2(p^\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, \gamma_p)$ с вероятностями $\pi(p^\alpha)$;

если $p \mid a$, то ξ_p принимает значения $f_1(p^\alpha)-f_2(p^\alpha)$ $\left(\alpha=0, 1, \ldots, \alpha_p(a)\right)$ и $f_1(p^{\alpha_p(a)})-f_2(p^\alpha)\left(\alpha=\alpha_p(a)+1, \ldots, \gamma_p\right)$ с вероятностями $\pi(p^\alpha)$.

Отсюда легко выводится, что $\varphi_n(t)$ лишь на величину $B/\ln n$ (оценка равномерна по t) отличается от произведения, стоящего в правой части (5.5). Остальное доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 4.7.

Теорема 5.5. *Пусть a — фиксированное целое положительное число, $f_1(m)$ и $f_2(m)$ — аддитивные арифметические функции, принимающие лишь целые значения, причем $f_1(p)=f_2(p)=0$ для всех простых p, за исключением множества простых чисел Q, удовлетворяющего условию*

$$\sum_{p\in Q}\frac{1}{p}<\infty.$$

Тогда для любого целого k существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\left\{f_1(m)-f_2(m+a)=k\right\}=\lambda_k,$$

где λ_k определяется из соотношения

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k e^{ikt}=\prod_{p\mid a}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_p(a)}\frac{1}{p^\alpha}e^{it\left(f_1(p^\alpha)-f_2(p^\alpha)\right)}+\right.$$

$$\left.+e^{itf_1\left(p^{\alpha_p(a)}\right)}\sum_{\alpha=\alpha_p(a)+1}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}e^{-itf_2(p^\alpha)}\right)\times$$

$$\times\prod_{p\nmid a}\left\{1-\frac{2}{p^2}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}\left(e^{itf_1(p^\alpha)}+e^{-itf_2(p^\alpha)}\right)\right\},$$

причем ряд и произведение сходятся абсолютно.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.4.

Из теоремы 5.4 имеем, в частности, что для всякой целочисленной аддитивной функции $f(m)$, подчиненной условию $f(p)=0$ для всех простых p, и для любого целого k

$$\nu_n\left\{f(m)-f(m+1)=k\right\}=\lambda_k+\frac{B\ln\ln n}{\ln n},$$

где λ_k можно определить из соотношения

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk} = \prod_p \left\{ 1 - \frac{2}{p^2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{e^{itf(p^\alpha)} + e^{-itf(p^\alpha)}}{p^\alpha} \right\} =$$

$$= \prod_p \left\{ 1 - \frac{2}{p^2} + 2\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\cos tf(p^\alpha)}{p^\alpha} \right\}.$$

Так в случае функции $f(m) = \Omega(m) - \omega(m)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{itk} = \prod_p \left\{ 1 - 2\left(1 + \frac{1}{p}\right) \frac{1 - \cos t}{p^2 - 2p\cos t + 1} \right\}.$$

6. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНАХ

Займемся теперь оценкой быстроты сходимости к предельному закону интегральных законов распределения „нормированных" функций на множестве $\{1, \ldots, n\}$ при $n\to\infty$. Мы ограничимся лишь случаем нормального предельного закона и, для простоты, довольно узким классом функций.

Теорема 6.1. *Пусть $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — вещественные сильно аддитивные функции такие, что*

$$B_i(n)\to\infty \quad \text{при} \quad n\to\infty;$$

$$\frac{1}{B_i(n)}\max_{p\leqslant n}|f_i(p)|\leqslant\mu_n \qquad (i=1, \ldots, s),$$

где μ_n не возрастает и стремится к 0 при $n\to\infty$; $a_1, \ldots, a_s$ — фиксированные различные между собой целые неотрицательные числа. Тогда при $n>n_1$ для всех x (n_1 не зависит от x)

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{i=1}^{s}\frac{f_i(m+a_i)-A_i(n)}{B_i(n)}<x\right\}=G(x)+$$

$$+B\mu_n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\ln\frac{1}{\mu_n}+1\right)$$

равномерно относительно $n>n_1$ и x.

Доказательство. Пусть $n>n_1$, где n_1 — достаточно большое. Положим

$$r=r(n)=\exp\left(\frac{\ln n}{c_{36}\ln\frac{1}{\mu_n}}\right), \quad c_{36}=\min\left(c_9,\ c_{30}\right).$$

Очевидно, что $\ln r(n) = o(\ln n)$ при $n \to \infty$. Кроме того,

$$B_j^2(n) = \sum_{p \leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} = BB_j^2(n)\,\mu_n^2 \ln\ln n;$$

отсюда

$$\mu_n^{-2} = B \ln\ln n, \tag{6.1}$$

следовательно, $r(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Далее,

$$B_j^2(n) - B_j^2(r) = \sum_{r < p \leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} =$$

$$= BB_j^2(n)\,\mu_n^2 \ln\ln \frac{1}{\mu_n} \qquad (j = 1, \ldots, s). \tag{6.2}$$

Как в § 5, через q будем обозначать простые числа, подчиненные условию $n_0 \leqslant q \leqslant r$, где n_0 больше s и всех простых делителей $a_j - a_k$ (j, $k = 1, \ldots, s$; $j \neq k$). Пусть, далее,

$$h_n(m) = \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j(m + a_j)}{B_j(n)},$$

$$h_n(m)_r = \sum_{j=1}^{s} \sum_{q} \frac{f_j^{(q)}(m + a_j)}{B_j(n)}.$$

Используя леммы 1.2, 1.6 и повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 5.1, найдем, что функция распределения

$$\nu_n\{h_n(m)_r < x\}$$

лишь на величину $B\mu_n$ (оценка равномерна по x) отличается от функции распределения $F_n(x)$, где $F_n(x)$ — свертка функций распределения случайных величин ξ_{nq}, принимающих значения:

$$0 \text{ с вероятностью } 1 - \frac{s}{q},$$

$$\frac{f_j(q)}{B_j(n)} \text{ с вероятностью } \frac{1}{q} \quad (j = 1, \ldots, s).$$

Среднее значение случайной величины $\sum\limits_q \xi_{nq}$ равно

$$\sum_q \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j(q)}{B_j(n)},$$

её дисперсия согласно (6.2)

$$D_n=\sum_q\left\{\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j^2(q)}{B_j^2(n)}-\left(\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(q)}{B_j(n)}\right)^2\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^2(n)}\left(B_j^2(r)-B_j^2(n_0)\right)+B\mu_n^2=$$

$$=s+B\mu_n^2\ln\ln\frac{1}{\mu_n},$$

а сумма третьих абсолютных центральных моментов случайных величин ξ_{nq}

$$\sum_q\left(1-\frac{s}{q}\right)\left|\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(q)}{B_j(n)}\right|^3+\sum_q\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{f_j(q)}{B_j(n)}-\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{s}\frac{f_k(q)}{B_k(n)}\right|^3=$$

$$=B\mu_n^3+B\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^3(n)}\sum_q\frac{|f_j(q)|^3}{q}+B\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{B_k^3(n)}\sum_q\frac{|f_j(q)|^3}{q^4}=$$

$$=B\mu_n^3+B\mu_n\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_q\frac{f_j^2(q)}{q}=B\mu_n.$$

На основании этих соображений к $F_n(x)$ можно применить известные результаты А. Берри и К. Г. Эссена ([38], [65]), что дает

$$F_n\left(\sqrt{D_n}\,x+\sqrt{D_n}\sum_{j=1}^{s}\sum_q\frac{f_j(q)}{q\,B_j(n)}\right)=G(x)+B\mu_n,$$

причем оценка равномерна относительно x. Следовательно, равномерно по n и x

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{D_n}}\left(h(m)_r-\sum_{j=1}^{s}\sum_q\frac{f_j(q)}{q\,B_j(n)}\right)<x\right\}=$$
$$=G(x)+B\mu_n. \tag{6.3}$$

Наша цель теперь — заменить в последнем соотношении $h(m)_r$ на $h(m)$, D_n на s и

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{q} \frac{f_j(q)}{q B_j(n)}$$

на

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{A_j(n)}{B_j(n)}.$$

Пусть $f(m)$ означает любую из функций $f_j(m)$ $(j=1, \ldots, s)$, а a, $A(n)$, $B(n)$ — соответствующие a_j, $A_j(n)$, $B_j(n)$. Имеем:

$$A(n) - \sum_{q} \frac{f(q)}{q} = \sum_{p<n_0} \frac{f(p)}{p} + \sum_{r<p\leqslant n} \frac{f(p)}{p} =$$

$$= B\left(1 + B(n)\mu_n \ln \frac{1}{\mu_n}\right),$$

или

$$\left| A(n) - \sum_{q} \frac{f(q)}{q} \right| < c_{39} B(n) \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n}, \tag{6.4}$$

где c_{39} и в дальнейшем c_{40}, c_{41} — положительные числа, не зависящие от n.

Далее,

$$\left| \sqrt{D_n} - \sqrt{s} \right| < c_{40} \mu_n^2 \ln \frac{1}{\mu_n}. \tag{6.5}$$

Так как число простых чисел $p > r$, делящих $m+a$, где $m \leqslant n$, равно

$$B \frac{\ln(n+a)}{\ln r} = B \ln \frac{1}{\mu_n},$$

то

$$f(m+a) - \sum_{q} f^{(q)}(m+a) = \sum_{\substack{p \mid m+a \\ p<n_0}} f(p) + \sum_{\substack{p \mid m+a \\ r<p\leqslant n+a}} f(p) =$$

$$= B + BB(n+a)\mu_{n+a} \ln \frac{1}{\mu_n}.$$

Однако

$$\mu_{n+a} \leqslant \mu_n,$$

$$B^2(n+a) = B^2(n) + BB^2(n+a)\mu_{n+a}^2,$$

откуда

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\left|h_n(m)-\sum_{j=1}^{s}\frac{A_j(n)}{B_j(n)}\right|\geqslant|x|\right\}=\frac{B}{x^2}=B\mu_n.$$

Поэтому

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\left(h_n(m)-\sum_{j=1}^{s}\frac{A_j(n)}{B_j(n)}\right)<-|x|\right\}=B\mu_n,$$

$$\nu_n\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\left(h_n(m)-\sum_{j=1}^{s}\frac{A_j(n)}{B_j(n)}\right)<|x|\right\}=1+B\mu_n.$$

С другой стороны,

$$G\left(-|x|\right)=1-G\left(|x|\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{|x|}e^{-\frac{1}{2}x^2}-\int_{|x|}^{\infty}\frac{1}{u^2}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du\right)=$$

$$=\frac{B}{|x|}e^{-\frac{1}{2}x^2}=B\sqrt{\mu_n}\exp\left(-\frac{1}{2\mu_n}\right)=B\mu_n.$$

Теорема доказана.

Она была доказана автором [20] с множителем $\ln^2\frac{1}{\mu_n}$ вместо $\ln\frac{1}{\mu_n}$, а затем уточнена М. Б. Барбаном [2] и Р. В. Уждавинисом.

Для функции $\omega(m)$ из теоремы 6.1 легко получаем:

$$\nu_n\left\{\frac{\omega(m)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}<x\right\}-$$

$$=G(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\ln\ln\ln n+1\right). \tag{6.7}$$

Как уже отмечалось в введении, быстротой сходимости интегрального закона для функции $\omega(m)$ к $G(x)$ занимался В. Левек [77], получивший оценку остаточного члена $B(\ln\ln n)^{-\frac{1}{4}}\ln\ln\ln n$. При этом им было высказано предположение, что верна оценка $B(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$. Оценка (6.7) лишь откуда

$$B(n+a)=B\,B(n).$$

Поэтому

$$\left| f(m+a)-\sum_{q} f^{(q)}(m+a) \right| < c_{41} B(n)\, \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n}. \qquad (6.6)$$

Из (6.4), (6.5) и (6.6) легко выводим, что

$$\nu_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{D_n}} \left(h_n(m)_r - \sum_{j=1}^{s} \sum_{q} \frac{f_j(q)}{q B_j(n)} \right) < x-\varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \nu_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \left(h_n(m) - \sum_{j=1}^{s} \frac{A_j(n)}{B_j(n)} \right) < x \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \nu_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{D_n}} \left(h_n(m)_r - \sum_{j=1}^{s} \sum_{q} \frac{f_j(q)}{q B_j(n)} \right) < x+\varepsilon \right\},$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{s}\, (c_{39}+c_{41})\, \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n} + c_{40} |x|\, \mu_n^2 \ln \frac{1}{\mu_n}.$$

Предполагая, что $|x| < \mu^{-\frac{1}{2}}$, имеем ($|\Theta| \leqslant 1$):

$$|G(x \pm \varepsilon) - G(x)| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+\Theta\varepsilon)^2} = B\varepsilon\, e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Тогда в силу (6.3) получаем:

$$\nu_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \left(h_n(m) - \sum_{j=1}^{s} \frac{A_j(n)}{B_j(n)} \right) < x \right\} =$$

$$= G(x) + B\left(\varepsilon e^{-\frac{1}{2}x^2} + \mu_n \right) = G(x) + B\mu_n \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} \ln \frac{1}{\mu_n} + 1 \right).$$

Теорема доказана для $|x| < \mu^{-\frac{1}{2}}$.

Остается рассмотреть случай $|x| \geqslant \mu_n^{-\frac{1}{2}}$. Из леммы 3.3 имеем, что

$$\sum_{m=1}^{n} \left(h_n(m) - \sum_{j=1}^{s} \frac{A_j(n)}{B_j(n)} \right)^2 = Bn,$$

при $|x|<\sqrt{2 \ln\ln\ln\ln n}$ на множитель $\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\ln\ln\ln n$ отличается от предполагаемой В. Левеком. Гипотезу В. Левека и еще больше мы докажем в § 9.

И теоремы 6.1 следует также, что

$$\nu_n\left\{\frac{\omega(m)-\omega(m+a)}{\sqrt{2\ln\ln n}}<x\right\}=$$

$$=G(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\ln\ln\ln n+1\right),$$

$$\nu_n\left\{\tau_k(m)<k^{\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}}\right\}=$$

$$=G(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\ln\ln\ln n+1\right),$$

$$\nu_n\left\{\tau_k(m+a)<k^{x\sqrt{2\ln\ln n}}\,\tau_k(m)\right\}=$$

$$=G(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\ln\ln\ln n+1\right),$$

где a — фиксированное целое положительное число.

Заметим, что для больших x эти оценки, а также оценку в теореме 6.1 можно значительно усилить, однако при достаточно больших x по сравнению с n нормальный закон уже не пригоден для аппроксимации закона распределения рассматриваемых здесь функций. В этом случае имеет место аналог формулы Г. Крамера [42] для больших уклонений. Об этом будет идти речь в § 9.

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ УРЕЗАННЫХ ФУНКЦИЙ

Займемся теперь изучением поведения последовательности урезанных функций $f(m)_1$, $f(m)_2$, ... на отрезке натурального ряда $\{1, \ldots, n\}$. Сначала докажем пару теорем типа закона больших чисел: аналог неравенства Колмогорова и аналог закона повторного логарифма.

Теорема 7.1. *Пусть $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — сильно аддитивные функции класса H; $a_1, \ldots, a_s$ — различные между собой фиксированные целые неотрицательные числа. Для любого $\varepsilon>0$ и некоторого постоянного $C>0$*

$$\nu_n\left\{\max_{k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(m+a_j)_k-A_j(k)}{B_j(n)}\right|>\varepsilon\right\}<\frac{C}{\varepsilon^2}$$

при $n>n_1(\varepsilon, C)$.

Доказательство. Пусть n_0 и $r=r(n)$ имеют те же значения, как и в доказательстве теоремы 5.1. Положим

$$h_j^{(p)}(m)=\frac{1}{B_j(n)}\left(f_j^{(p)}(m+a_j)-\frac{f_j(p)}{p}\right).$$

Применение теоретико-вероятностной интерпретации, приведенной в начале § 5, и неравенства Колмогорова для последовательности независимых случайных величин приводит к неравенству

$$\nu_n\left\{\max_{k\leqslant r}\left|\sum_{j=1}^{s}\sum_{n_0\leqslant p\leqslant k}h_j^{(p)}(m)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}<\frac{4}{\varepsilon^2}+o(1)<\frac{5}{\varepsilon^2} \qquad (7.1)$$

при $n>n_2(\varepsilon)$.

Заметим, что при $k<n_0$

$$\left|\sum_{j=1}^{s} \sum_{p\leqslant k} h_j^{(p)}(m)\right| \leqslant \sum_{j=1} \frac{1}{B_j(n)} \sum_{p<n_0} |f_j(p)| \left(1-\frac{1}{p}\right) = o(1) \quad (7.2)$$

равномерно по k. Далее, при $r<k\leqslant n$, как и в доказательстве теоремы 5.1, имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s} \sum_{r<p\leqslant n} \left|h_j^{(p)}(m)\right|\right)^2 =$$

$$= B \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{r<p\leqslant k} \left|h_j^{(p)}(m)\right|\right)^2 = o(n).$$

Отсюда заключаем, что для всех $m\leqslant n$, за исключением, быть может, $o(n)$ чисел,

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{r<p\leqslant n} \left|h_j^{(p)}(m)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

и, тем более, для тех же чисел m и для любого k, $r<$ $<k\leqslant n$,

$$\left|\sum_{j=1}^{s} \sum_{r<p\leqslant k} h_j^{(p)}(m)\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (7.3)$$

Оценки (7.2), (7.3) вместе с (7.1) доказывают теорему.

Теорема 7.2. *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — фиксированные целые неотрицательные числа, различные между собой; $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — вещественные сильно аддитивные функции, удовлетворяющие следующим условиям: существуют постоянные $B_n \to \infty$ при $n\to\infty$, $B_j(n) \sim B_n$ $(j=1, \ldots, s)$,*

$$\max_{p\leqslant n} \left|f_j(p)\right| = o\left(\frac{B_n}{\sqrt{\ln\ln n}}\right) \qquad (j=1, \ldots, s).$$

Пусть $\varepsilon>0$, $\delta>0$ — как угодно малые числа, K — произвольно большое число. Тогда существуют два таких числа $u\geqslant K$ и n_1, что при $n>n_1$

$$\nu_n\left\{\max_{k>u}\left|\sum_{j=1}^{s}\left(f_j(m+a_j)_k-A_j(k)\right)\right|>\right.$$
$$\left.>(1+\delta)B_n\sqrt{2s\ln\ln B_n}\right\}<\varepsilon,$$
$$\nu_n\left\{\max_{k>u}\left|\sum_{j=1}^{s}\left(f_j(m+a_j)_k-A_j(k)\right)\right|>\right.$$
$$\left.>(1-\delta)B_n\sqrt{2s\ln\ln B_n}\right\}>1-\varepsilon.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\Lambda_n=\max_{1\leqslant j\leqslant s}\max_{p\leqslant n}\left|f_j(p)\right|,\quad r=r(n)=\exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda_n}{B_n}}\ln n\right).$$

Сохраним, далее, обозначения n_0, q из § 5. Поле вероятностей, построенное в начале § 5, и закон повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин (см., напр., [35]) позволяют заключить, что существуют такие числа $u\geqslant K$ и n_1, что при $n>n_1$

$$\nu_n\left\{\max_{u<k\leqslant r}\left|\sum_{j=1}^{s}\sum_{q\leqslant k}\left(f_j^{(q)}(m+a_j)-\frac{f_j(q)}{q}\right)\right|>\right.$$
$$\left.>\left(1+\frac{\delta}{2}\right)B^*(r)\sqrt{2\ln\ln B^*(r)}\right\}<\varepsilon,\tag{7.4}$$
$$\nu_n\left\{\max_{u<k\leqslant r}\left|\sum_{j=1}^{s}\sum_{q\leqslant k}\left(f_j^{(q)}(m+a_j)-\frac{f_j(q)}{q}\right)\right|>\right.$$
$$\left.>\left(1-\frac{\delta}{2}\right)B^*(r)\sqrt{2\ln\ln B^*(r)}\right\}>1-\varepsilon.$$

Здесь

$$B^*(r)=\left\{\sum_{q}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j^2(q)}{q}-\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(q)}{q}\right)^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{s} B_j^2(r)+B\sum_{j=1}^{s}\sum_{q}\frac{f_j^2(q)}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\sum_{j=1}^{s} B_j^2(r)\Big(1+o(1)\Big)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

согласно лемме 4.2. Так как

$$B_j^2(n)-B_j^2(r)=\sum_{r<p\leqslant n}\frac{f_j^2(p)}{p}=B\Lambda_n^2\ln\frac{B(n)}{\Lambda_n}=o\left(B_n^2\right),$$

то

$$B^*(r)=\sqrt{s}\,B_n\Big(1+o(1)\Big). \tag{7.5}$$

При $k\leqslant r$

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\left\{\Big(f_j(m+a_j)_k-A_j(k)\Big)-\sum_{q\leqslant k}\left(f_j^{(q)}(m+a_j)-\frac{f_j(q)}{q}\right)\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{s}\sum_{p<n_0}\left|f_j(p)\right|\left(1-\frac{1}{p}\right)=B \tag{7.6}$$

равномерно по k. Далее, при $r<k\leqslant n$

$$\left|A_j(k)-A_j(r)\right|=\left|\sum_{r<p\leqslant k}\frac{f_j(p)}{p}\right|\leqslant\sum_{r<p\leqslant n}\frac{|f_j(p)|}{p}=$$

$$=B\Lambda_n\ln\frac{B_n}{\Lambda_n}=o\left(B_n\right) \tag{7.7}$$

равномерно по k. Наконец, при $m\leqslant n,\ r<k\leqslant n$

$$\left|f_j(m+a_j)_k-f_j(m+a_j)_r\right|=\left|\sum_{\substack{p\mid m+a_j\\ r<p\leqslant k}}f_j(p)\right|\leqslant\Lambda_{n+a_j}y,$$

где

$$y=\sum_{\substack{p\mid m+a_j\\ r<p\leqslant n}}1.$$

Но $ry\leqslant n+a_j$, откуда

$$y=B\frac{\ln n}{\ln r}=B\sqrt{\frac{B_n}{\Lambda_n}}.$$

Кроме того,

$$B_j^2(n+a_j)-B_j^2(n)=\sum_{n<p\leqslant n+a_j}\frac{f_j^2(p)}{p}=B\Lambda_{n+a_j}^2=o\left(B_{n+a_j}^2\right).$$

Следовательно,

$$B_{n+a_j}\sim B_n,\quad \frac{\Lambda_n}{B_n}\leqslant\frac{\Lambda_{n+a_j}}{B_n}=B\,\frac{\Lambda_{n+a_j}}{B_{n+a_j}}.$$

Таким образом, при $r<k\leqslant n$, $m\leqslant n$

$$f(m+a_j)_k-f_j(m+a_j)_r=B\Lambda_{n+a_j}\sqrt{\frac{B_n}{\Lambda_n}}=o(B_n) \tag{7.8}$$

равномерно относительно k и m.

Из (7.4) – (7.8) следует теорема.

Докажем теперь для последовательности урезанных функций теорему, представляющую собой аналог известной теоремы А. Н. Колмогорова о поведении в целом последовательности частичных сумм независимых случайных величин. Для этого нам потребуется

Лемма 7.1. *Пусть* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — *определенные в сегменте* $[0,\ 1]$ *вещественные функции, непрерывно дифференцируемые и подчиненные условиям* $\psi_1(t)<0<\psi_2(t)$; $w(x,\ t)$ — *решение уравнения*

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{7.9}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &w(x,\ 1)=1 \quad \text{при } \psi_1(1)<x<\psi_2(1),\\ &w\big(\psi_1(t),\ t\big)=w\big(\psi_2(t),\ t\big)=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant t<1. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Пусть, далее, $\psi_1^*(t)$, $\psi_2^*(t)$ — *функции, удовлетворяющие тем же условиям, как и* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, *причем* $\left|\psi_j(t)-\psi_j^*(t)\right|<\varepsilon\ (j=1,\ 2)$ *для всех* $t\in[0,\ 1]$, *где* ε — *малое положительное число. Если* $w^*(x,\ t)$ — *решение уравнения* (7.9), *удовлетворяющее условиям, которые получаются из* (7.10) *путем замены* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ *на* $\psi_1^*(t)$, $\psi_2^*(t)$ *соответственно, то*

$$w(0,\ 0)-w^*(0,\ 0)=B\varepsilon.$$

Доказательство. Возьмем непрерывную функцию $\varphi(x)$, определенную на всей оси x, равную 1 в интервалах

$\left(\psi_1(1),\ \psi_2(1)\right)$, $\left(\psi_1^*(1),\ \psi_2^*(1)\right)$ и обращающуюся в 0 вне некоторого конечного промежутка. Функция

$$w_0(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x+u\sqrt{1-t}\right)e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$$

удовлетворяет уравнению (7.9) при $t<1$ и условиям $w_0(x,\ 1)=1$ при $x\in\left(\psi_1(1),\ \psi_2(1)\right)$ и при $x\in\left(\psi_1^*(1),\ \psi_2^*(1)\right)$. Положив для краткости

$$W(t,\ x)=\frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

решения $w(x,\ t)$ и $w^*(x,\ t)$ уравнения (7.9) можно представить в виде*

$$\begin{gathered} w(x,\ t)=w_0(x,t)+\sum_{j=1}^{2}\int_t^1\chi_j(\tau)\,W\left(\tau-t,\ x-\psi_j(\tau)\right)d\tau, \\ w^*(x,\ t)=w_0(x,\ t)+\sum_{j=1}^{2}\int_t^1\chi_j^*(\tau)\,W\left(\tau-t,\ x-\psi_j^*(\tau)\right)d\tau, \end{gathered} \tag{7.11}$$

где $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$, $\chi_1^*(t)$, $\chi_2^*(t)$ — непрерывные в сегменте $[0,\ 1]$ функции, определенные единственным образом из систем интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{cases} \chi_1(t)=-w_0\left(\psi_1(t),\ t\right)-\sum_{j=1}^{2}\int_t^1\chi_j(\tau)\,W\left(\tau-t,\ \psi_1(t)-\psi_j(\tau)\right)d\tau, \\ \chi_2(t)=w_0\left(\psi_2(t),\ t\right)+\sum_{j=1}^{2}\int_t^1\chi_j(\tau)\,W\left(\tau-t,\ \psi_2(t)-\psi_j(\tau)\right)d\tau, \end{cases} \tag{7.12}$$

$$\begin{cases} \chi_1^*(t)=-w_0\left(\psi_1^*(t),\ t\right)-\sum_{j=1}^{2}\int_t^1\chi_j^*(\tau)\,W\left(\tau-t,\ \psi_1^*(t)-\psi_j^*(\tau)\right)d\tau, \\ \chi_2^*(t)=w_0\left(\psi_2^*(t),\ t\right)+\sum_{j=1}^{2}\int_t^1\chi_j^*(\tau)\,W\left(\tau-t,\ \psi_2^*(t)-\psi_j^*(\tau)\right)d\tau. \end{cases} \tag{7.13}$$

---

* На возможность использования этого представления для доказательства леммы указала нам О. А. Ладыженская.

Через $c_{42}, c_{43}, \ldots, c_{58}$ будем обозначать положительные числа, не зависящие от t, τ, ε.

Легко видеть, что функцию $\varphi(x)$ можно подобрать так, чтобы при $t\in[0, 1]$

$$\left|w_0\left(\psi_j(t),t\right)-w_0\left(\psi_j^*(t),\ t\right)\right|<c_{42}\,\varepsilon \qquad (j=1,\ 2). \tag{7.14}$$

Докажем, что при $t\in[0, 1]$

$$\left|\chi_j(t)-\chi_j^*(t)\right|<c_{43}\,\varepsilon \qquad (j=1,\ 2).$$

Из (7.12), (7.13), (7.14) получаем:

$$\left|\chi_1(t)-\chi_1^*(t)\right|\leqslant c_{42}\,\varepsilon+\sum_{j=1}^{2}\int_t^1|\chi_j(\tau)|\times$$

$$\times\left|W\left(\tau-t,\ \psi_1(t)-\psi_j(t)\right)-W\left(\tau-t,\ \psi_1^*(t)-\psi_j^*(\tau)\right)\right|d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_t^1\left|\chi_j(\tau)-\chi_j^*(\tau)\right|\left|W\left(\tau-t,\ \psi_1^*(t)-\psi_j^*(\tau)\right)\right|d\tau. \tag{7.15}$$

По теореме о конечном приращении заключаем, что при $0\leqslant t<\tau\leqslant 1$

$$\left|W\left(\tau-t,\ \psi_1^*(t)-\psi_1^*(\tau)\right)\right|\leqslant\frac{|\psi_1^*(t)-\psi_1^*(\tau)|}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}}<\frac{c_{44}}{\sqrt{\tau-t}}.$$

Так как $\psi_2^*(\tau)-\psi_1^*(t)>c_{45}$ при $t\in[0, 1]$, $\tau\in[0, 1]$, то для $0\leqslant t<\tau\leqslant 1$

$$\left|W\left(\tau-t,\ \psi_1^*(t)-\psi_2^*(\tau)\right)\right|<\frac{c_{46}}{\sqrt{(\tau-t)^3}}\exp\left(\frac{c_{47}}{t-\tau}\right)<c_{48}$$

и для тех же t, τ

$$\left|W\left(\tau-t,\ \psi_1(t)-\psi_j(\tau)\right)-W\left(\tau-t,\ \psi_1^*(t)-\psi_j^*(\tau)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_{49}}{\sqrt{(\tau-t)^3}}\left|\left(\psi_1(t)-\psi_j(\tau)\right)-\left(\psi_1^*(t)-\psi_j^*(\tau)\right)\right|\exp\left(\frac{c_{50}}{t-\tau}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_{51}\,\varepsilon}{\sqrt{(\tau-t)^3}}\exp\left(\frac{c_{50}}{t-\tau}\right)<c_{52}\,\varepsilon \qquad (j=1,\ 2).$$

Подсталвяя эти оценки в правые части (7.16) и (7.17), в силу (7.18) имеем:

$$\left|\chi_j(t)-\chi_j^*(t)\right| < \varepsilon\left\{c_{53}+6c_{53}^2L(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}+$$

$$+2^{\frac{5}{2}}3^{\frac{3}{2}}c_{53}^2L^2(1-t) \qquad (j=1,\ 2).$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\left|\chi_j(t)-\chi_j^*(t)\right| < \varepsilon\sum_{l=0}^{k}\frac{2^{\frac{3}{2}l}3^l}{\sqrt{(l+1)!}}c_{53}^lL^l(1-t)^{\frac{1}{2}l}+$$

$$+\frac{2^{\frac{3}{2}(k+1)}3^{k+1}}{\sqrt{(k+2)!}}c_{53}^{k+1}L^{k+1}(1-t)^{\frac{1}{2}(k+1)} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots;\ j=1,\ 2).$$

Отсюда, устремляя k в ∞, заключаем, что

$$\left|\chi_j(t)-\chi_j^*(t)\right| < c_{43}\,\varepsilon \qquad (j=1,\ 2). \tag{7.19}$$

Из (7.11) имеем:

$$\left|w(0,\ 0)-w^*(0,0)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{2}\int_0^1\left|\chi_j(\tau)-\chi_j^*(\tau)\right|\times$$

$$\times\left|W\left(\tau,\ -\ \psi_j^*(\tau)\right)\right|d\tau+\sum_{j=1}^{2}\int_0^1|\chi_j(\tau)|\times$$

$$\times\left|W\left(\tau,\ -\ \psi_j(\tau)\right)-W\left(\tau,\ -\ \psi_j^*(\tau)\right)\right|d\tau.$$

Ввиду неравенств $\psi_1(t) < -c_{54}$, $\psi_1^*(t) < -c_{54}$, $\psi_2(t) > c_{54}$, $\psi_2^*(t) > c_{54}$ при $t\in[0,\ 1]$ и (7.19) по теореме о конечном приращении выводим:

$$\left|w(0,\ 0)-w^*(0,0)\right| \leqslant c_{55}\,\varepsilon\int_0^1 e^{-\frac{c_{56}}{\tau}}\tau^{-\frac{3}{2}}d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_0^1\left|\psi_j(\tau)-\psi_j^*(\tau)\right|e^{-\frac{c_{57}}{\tau}}\tau^{-\frac{3}{2}}d\tau < c_{58}\,\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Подставляя эти оценки в (7.15), получаем, что при $t \in [0, 1]$

$$\left|\chi_1(t) - \chi_1^*(t)\right| < c_{53}\left\{\varepsilon + \sum_{j=1}^{2} \int_t^1 \left|\chi_j(\tau) - \chi_j^*(\tau)\right| (\tau - t)^{-\frac{1}{2}} d\tau\right\}. \quad (7.16)$$

Совершенно аналогично из (7.12), (7.13) и (7.14) заключаем, что для тех же t

$$\left|\chi_2(t) - \chi_2^*(t)\right| < c_{53}\left\{\varepsilon + \sum_{j=1}^{2} \int_t^1 \left|\chi_j(\tau) - \chi_j^*(\tau)\right| (\tau - t)^{-\frac{1}{2}} d\tau\right\}, \quad (7.17)$$

если только c_{53} достаточно большое.

Пусть теперь $\lambda \geqslant 0$ не зависит от τ. Тогда при $0 \leqslant t < 1$

$$\int_t^1 \frac{(1-\tau)^\lambda}{\sqrt{\tau - t}} d\tau = \int_t^{\frac{\lambda t+1}{\lambda+1}} \frac{(1-\tau)^\lambda}{\sqrt{\tau - t}} d\tau + \int_{\frac{\lambda t+1}{\lambda+1}}^1 \frac{(1-\tau)^\lambda}{\sqrt{\tau - t}} d\tau <$$

$$< (1-t)^\lambda \int_t^{\frac{\lambda t+1}{\lambda+1}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t}} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{1-t}} \int_{\frac{\lambda t+1}{\lambda+1}}^1 (1-\tau)^\lambda d\tau =$$

$$= \frac{2(1-t)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda+1}} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\lambda+1} \frac{(1-t)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda+1}} <$$

$$< \frac{3(1-t)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda+1}}. \quad (7.18)$$

Положим

$$L = \max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ j=1,2}} \left|\chi_j(t) - \chi_j^*(t)\right|.$$

Из (7.16), (7.17), (7.18) следует, что

$$\left|\chi_j(t) - \chi_j^*(t)\right| < c_{53}\varepsilon + 6c_{53} L (1-t)^{\frac{1}{2}} \qquad (j = 1,\ 2).$$

Теорема 7.3. *Пусть вещественные сильно аддитивные функции* $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ *удовлетворяют условиям*

$$B_j(n) \to \infty \text{ при } n \to \infty, \quad \frac{1}{B_j(n)} \max_{p \leqslant n} |f_j(p)| \leqslant \mu_n \ (j=1, \ldots, s),$$

где μ_n *не возрастает и стремится к 0 при* $n \to \infty$; $a_1, \ldots, a_s$ — *различные между собой фиксированные целые неотрицательные числа;* $\psi_1(t)$ *и* $\psi_2(t)$ — *две определенные в сегменте* $[0, 1]$ *вещественные функции, непрерывно дифференцируемые и подчиненные условию* $\psi_1(t) < 0 < \psi_2(t)$. *Пусть, далее,* K_n — *число целых положительных* $m \leqslant n$, *удовлетворяющих системе неравенств**

$$\psi_1\left(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j^2(k)}{B_j^2(n)}\right) < \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(m+a_j)_k - A_j(k)}{B_j(n)} <$$

$$< \psi_2\left(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j^2(k)}{B_j^2(n)}\right) \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (7.20)$$

Тогда $K_n/n \to w(0, 0)$ *при* $n \to \infty$, *где* $w(x, t)$ *есть решение уравнения*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$w(x, 1) = 1 \quad \text{при} \quad \psi_1(1) < x < \psi_2(1),$$

$$w\big(\psi_1(t), t\big) = w\big(\psi_2(t), t\big) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < 1.$$

Доказательство. Пусть

$$r = r(n) = n^{\sqrt{\mu_n}},$$

n_0 — фиксированное число, больше s и простых делителей $a_j - a_l$ ($j, l = 1, \ldots, s$; $j \neq l$). Через q будем обозначать простые числа, подчиненные условиям $n_0 \leqslant q \leqslant r$. Пусть ξ_q обо-

* Очевидно, вместо $k=1, 2, \ldots, n$ можно брать простые числа $p=2, 3, 5, \ldots$; $p \leqslant n$.

значает независимую случайную величину, принимающую значения

$$\frac{f_j(q)}{B_j(n)} \quad (j=1, \ \ldots, \ s) \text{ с вероятностями } \frac{1}{q},$$
$$0 \qquad\qquad \text{с вероятностью } 1-\frac{s}{q}.$$

Дисперсия суммы

$$\sum_{q\leqslant k} \xi_q$$

равна

$$B_k^2=\sum_{q\leqslant k}\left\{\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j^2(q)}{qB_j^2(n)}-\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(q)}{qB_j(n)}\right)^2\right\}=$$
$$=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_{q\leqslant k}\frac{f_j^2(q)}{q}+B\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_{q}\frac{f_j^2(q)}{q^2}=$$
$$=\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j^2(k)}{B_j^2(n)}+B\mu_n^2 \tag{7.21}$$

равномерно по $k\leqslant r$. Из теоремы А. Н. Колмогорова ([35], стр. 69) следует, что вероятность системы неравенств

$$\psi_1\left(\frac{B_k^2}{B_r^2}\right)<\frac{1}{B_r}\sum_{q\leqslant k}\left(\xi_q-\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j(q)}{B_j(n)}\right)<\psi_2\left(\frac{B_k^2}{B_r^2}\right) \qquad (n_0\leqslant k\leqslant r)$$

равна $w(0, 0)+o(1)$ при $n\to\infty$. Из теоретико-вероятностной интерпретации, приведенной в начале § 5, заключаем, что число целых положительных чисел $m\leqslant n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\psi_1\left(\frac{B_k^2}{B_r^2}\right)<\frac{1}{B_r}\sum_{q\leqslant k}\sum_{j=1}^{s}\frac{f_j^{(q)}(m+a_j)-\frac{f_j(q)}{q}}{B_j(n)}<\psi_2\left(\frac{B_k^2}{B_r^2}\right)$$
$$(k=1, \ 2, \ \ldots, \ [r]) \tag{7.22}$$

равно $nw(0, 0)+o(n)$.

Остается показать, что числа решений систем (7.20) и (7.22) в целых положительных $m \leqslant n$ отличаются лишь на величину порядка $o(n)$. Из (7.21) следует, что

$$B_r^2 = s - \sum_{j=1}^{s} \sum_{r<p\leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p B_j^2(n)} + B\mu_n^2 = s + B\mu_n^2 \ln \frac{1}{\mu_n},$$

$$B_r = \sqrt{s}\left(1 + B\mu_n^2 \ln \frac{1}{\mu_n}\right).$$

Далее, равномерно по $m \leqslant n$ и k: при $k < n_0$

$$A_j(k) = B, \quad B_j^2(k) = B,$$

$$\left|f_j(m+a_j)_k\right| \leqslant \sum_{p<n_0} \left|f_j(p)\right| = B$$

и при $r < k \leqslant n$

$$1 - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} \frac{B_j^2(k)}{B_j^2(n)} = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} \frac{B_j^2(n) - B_j^2(k)}{B_j^2(n)} =$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j^2(n)} \sum_{k<p\leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} \leqslant \frac{\mu_n^2}{s} \sum_{j=1}^{s} \sum_{r<p\leqslant n} \frac{1}{p} = B\mu_n^2 \ln \frac{1}{\mu_n},$$

$$\left|A_j(k) - A_j(r)\right| \leqslant \sum_{r<p\leqslant n} \frac{f_j(p)}{p} = B B_j(n)\, \mu_n \ln \frac{1}{\mu_n},$$

$$\left|f_j(m+a_j)_k - f_j(m+a_j)_r\right| \leqslant \sum_{\substack{p \mid m+a_j \\ r<p\leqslant n}} |f_j(p)| = B B_j(n) \sqrt{\mu_n}$$

аналогично (7.8). Применение леммы 7.1 завершает доказательство теоремы.

Теорему можно усилить путем применения одной теоремы Ю. В. Прохорова ([27], т. 4.1).

Примеры. Пусть a — фиксированное целое положительное число; $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и $w(0, 0)$ — величины, указанные в формулировке теоремы 7.3; $\omega(m)_k$ — число различных простых делителей m, не превосходящих k; $\tau(m)_k$ — число всех делителей m, не делящихся на простые числа $>k$. Тогда число решений в целых положительных $m \leqslant n$ каждой из следующих систем неравенств

$$\psi_1\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right) < \frac{\omega(m)_p - \ln\ln p}{\sqrt{\ln\ln n}} < \psi_2\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right)$$

$$(p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots;\ p \leqslant n),$$

$$\psi_1\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right) < \frac{\omega(m)_p - \omega(m+a)_p}{\sqrt{2\ln\ln n}} < \psi_2\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right)$$

$$(p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots;\ p \leqslant n),$$

$$2^{\ln\ln p + \psi_1\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right)\sqrt{\ln\ln n}} < \tau(m)_p < 2^{\ln\ln p + \psi_2\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right)\sqrt{\ln\ln n}}$$

$$(p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots;\ p \leqslant n),$$

$$2^{\psi_1\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right)\sqrt{2\ln\ln n}}\,\tau(m)_p < \tau(m+a)_p < 2^{\psi_2\left(\frac{\ln\ln p}{\ln\ln n}\right)\sqrt{2\ln\ln n}}$$

$$(p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots;\ p \leqslant n)$$

равно $nw(0,\ 0) + o(n)$ при $n \to \infty$.

8. МНОГОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

Предыдущие теоремы могут быть обобщены на многомерный случай. Мы ограничимся изложением обобщения теоремы 4.1 на многомерный случай в двух различных направлениях, причем откажемся от требования сходимости дисперсий законов распределения аддитивной арифметической функции на конечных отрезках натурального ряда к дисперсии предельного закона.

Пусть R_s — s-мерное вещественное координатное эвклидово пространство. Будем пользоватся обозначениями, принятыми в векторной алгебре, причем скалярное произведение векторов X и Y из R_s будем обозначать через XY, а длину вектора X — через $|X|$. Замыкание точечного множества E условимся обозначать через $\bar{E}$.

Точку $(x_1, \ldots, x_s)$ мы будем называть „неисключенной“ точкой функции распределения $F(x_1, \ldots, x_s)$, если $x_1, \ldots, x_s$ являются точками непрерывности соответствующих одномерных функций распределения $F(x, \infty, \ldots, \infty), \ldots, F(\infty, \ldots, \infty, x)$. Сходимость последовательности функций распределения $\{F_n(x_1, \ldots, x_s)\}$ к функции распределения $F(x_1, \ldots, x_s)$ мы будем понимать как обыкновенную сходимость последовательности функций $\{F_n(x_1, \ldots, x_s)\}$ к $F(x_1, \ldots, x_s)$ в каждой „неисключенной“ точке последней.

Нам понадобятся некоторые сведения из теории безгранично делимых случайных векторов.

s-мерный случайный вектор называется безгранично делимым, если при любом целом положительном n его можно представить в виде суммы n независимых одинаково распределенных слагаемых. Соответствующее распределение называется безгранично делимым распределением. Известно ([78], стр. 220), что для того чтобы комплексная функция от s вещественных аргументов $\varphi(T)=\varphi(t_1, \ldots, t_s)$, определенная в R_s, была характеристической функцией некоторого s-мерного безгранично делимого распределения, необходимо и достаточно, чтобы ее логарифм мог быть представлен в виде

$$\ln\varphi(T)=i\Gamma T-\frac{1}{2}\sigma(T)+\int\limits_{|X|>0}\left(e^{iTX}-1-\frac{iTX}{1+|X|^2}\right)dQ, \qquad (8.1)$$

где Γ — постоянный s-мерный вектор, $\sigma(T)$ — неотрицательная квадратичная форма от s переменных с конечными коэффициентами, X — переменный вектор, $Q=Q(E)$ — вполне аддитивная неотрицательная функция множества, определенная для всех борелевских множеств E в R_s, не содержащих начала координат, и такая, что интеграл

$$\int\limits_{|X|>0}\frac{|X|^2}{1+|X|^2}\,dQ$$

конечен. Представление $\ln\varphi(T)$ формулой (8.1) единственно.

Распределение, предельное для безгранично делимых распределений, безгранично делимо. Имеет место следующая

Лемма 8.1. *Для того чтобы последовательность безгранично делимых распределений, логарифмы характеристических функций которых согласно* (8.1) *равны*

$$i\Gamma_n T-\frac{1}{2}\sigma_n(T)+\int\limits_{|X|>0}\left(e^{iTX}-1-\frac{iTX}{1+|X|^2}\right)dQ_n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

сходилась к предельному распределению, логарифм характеристической функции которого равен

$$i\Gamma T-\frac{1}{2}\sigma(T)+\int\limits_{|X|>0}\left(e^{iTX}-1-\frac{iTX}{1+|X|^2}\right)dQ,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$2^\circ \quad -\sum_{p\leqslant n} \frac{|L_n(p)|^2}{p(1+|L_n(p)|^2)} L_n(p) \to \Gamma \quad \textit{при} \quad n\to\infty;$$

$$3^\circ \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\substack{p\leqslant n\\ |L_n(p)|<\varepsilon}} \frac{1}{p}\left(TL_n(p)\right)^2 \to \sigma(T) \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Логарифм характеристической функции $\ln\varphi(T)$ *предельной функции распределения вычисляется по формуле* (8.1) *с функциями* $Q(E)$, $\sigma(T)$ *и постоянным вектором* Γ.

Доказательство. В силу условия, что $f_j(m)\in H$ $(j=1, \ldots, s)$, существуют функции $r_j(n)$ и $\psi_j(n)$ такие, что

$$\frac{\ln r_j(n)}{\ln n} \to 0, \quad \frac{B_j\left(r_j(n)\right)}{B_j(n)} - 1 = -\psi_j(n) \to 0$$

при $n\to\infty$. Положим

$$r_j'(n) = \begin{cases} r_j(n), \text{ если } \psi_j(n) \leqslant (\ln\ln n)^{-3}, \\ r_j(n) + \exp\left\{\dfrac{\ln n}{\exp\left(\psi_j^{-\frac{1}{4}}(n)\right)}\right\}, \text{ если } \psi_j(n) > (\ln\ln n)^{-3}, \end{cases}$$

$$r = r(n) = \max_{1\leqslant j\leqslant s} r_j'(n).$$

Очевидно, что при $n\to\infty$

$$\frac{\ln r}{\ln n} \to 0, \quad \frac{B_j(r)}{B_j(n)} \to 1 \qquad (j=1, \ldots, s).$$

Теоретико-вероятностная интерпретация аддитивных арифметических функций, приведенная в § 2, позволяет заключить, что функция распределения (8.2) лишь на величину, стремящуюся к нулю при $n\to\infty$ равномерно по $x_1, \ldots, x_s$, отличается от функции распределения суммы независимых случайных величин

$$\sum_{p\leqslant r}\left(\Xi_{np} - \frac{1}{p} L_n(p)\right), \tag{8.3}$$

1° $Q_n(I) \to Q(I)$ *при* $n \to \infty$ *для всех интервалов непрерывности функции* $Q(E)$ *вида* $0 \notin \bar{I}$,

2° $\Gamma_n \to \Gamma$ *при* $n \to \infty$,

$$3° \ \varlimsup_{n\to\infty} \left(\int\limits_{0<|X|<\varepsilon} (TX)^2 \, dQ_n + \sigma_n(T) \right) \to \sigma(T)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 8.1 является обобщением аналогичной теоремы для одномерных распределений и доказывается при помощи тех же соображений, как и одномерная. В несколько иной формулировке её можно найти в работе [28].

Отметим, что в условии 3° леммы 8.1, а также в условиях 3° формулируемых ниже теорем 8.1 и 8.2 $\varlimsup$ можно заменить на lim.

Теорема 8.1. *Пусть* $f_1(m), \ldots, f_s(m)$ — *сильно аддитивные функции из класса* H. *Для того чтобы функции распределения*

$$\nu_n \left\{ \frac{f_1(m) - A_1(n)}{B_1(n)} < x_1, \ \ldots, \ \frac{f_s(m) - A_s(n)}{B_s(n)} < x_s \right\} \qquad (8.2)$$

при $n \to \infty$ *сходились к предельной в каждой „неисключенной“ точке последней, необходимо и достаточно существование неотрицательной вполне аддитивной функции множества* $Q(E)$, *определенной для всех борелевских множеств* E *в* R_s, *не содержащих начала координат, постоянного вектора* Γ *и неотрицательной квадратичной формы от* s *переменных* $\sigma(T)$ *с конечными коэффициентами, обладающих свойствами:*

1° *для всякого интервала непрерывности* I *функции* $Q(E)$, $0 \notin \bar{I}$,

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ L_n(p) \in I}} \frac{1}{p} \to Q(I) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где

$$L_n(p) = \left(\frac{f_1(p)}{B_1(n)}, \ \ldots, \ \frac{f_s(p)}{B_s(n)} \right);$$

где Ξ_{np} принимает значения $L_n(p)$ с вероятностью $1/p$ и $(0, \ldots, 0)$ с вероятностью $1-1/p$. Характеристическая функция $\varphi_n(T)$ суммы (8.3) равна

$$\varphi_n(T)=\prod_{p\leqslant r} e^{-\frac{i}{p}L_n(p)T}\left(1-\frac{1-e^{iL_n(p)T}}{p}\right).$$

В дальнейшем нам потребуются следующие оценки, которые легко получаются из леммы 4.2:

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{|L_n(p)|^2}{p^2}=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{B_j^2(n)}\sum_{p\leqslant n}\frac{f_j^2(p)}{p^2}=o(1),$$

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{|L_n(p)|}{p^2}\leqslant\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^2}\cdot\sum_{p\leqslant n}\frac{|L_n(p)|^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}=o(1). \qquad (8.4)$$

В силу леммы 4.7

$$\left|e^{iL_n(p)T}-1\right|\leqslant|L_n(p)T|.$$

Из (8.4) получаем, что

$$\frac{1}{p}\,|L_n(p)T|=o(1)$$

равномерно для $|T|\leqslant t$. Следовательно, согласно (8.4)

$$\ln\varphi_n(T)=\sum_{p\leqslant r}\left\{-\frac{i}{p}L_n(p)T+\ln\left(1+\frac{e^{iL_n(p)T}-1}{p}\right)\right\}=$$

$$=\sum_{p\leqslant r}\left(-\frac{i}{p}L_n(p)T+\frac{e^{iL_n(p)T}-1}{p}+B\,\frac{|L_n(p)T|^2}{p^2}\right)=$$

$$=\sum_{p\leqslant r}\left(-\frac{i}{p}L_n(p)T+\frac{e^{iL_n(p)T}-1}{p}\right)+o(1)$$

равномерно для $|T|\leqslant t$.

Определим теперь функцию $Q_n(E)$ для всех борелевских множеств E в R_s:

$$Q_n(E)=\sum_{\substack{p\leqslant r\\ L_n(p)\in E}}\frac{1}{p}.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{R_s} \frac{|X|^2}{1+|X|^2}\, dQ_n \leqslant \int\limits_{R_s} |X|^2\, dQ_n = \sum_{p\leqslant r} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j^2(p)}{B_j^2(n)} \leqslant s.$$

Кроме того,

$$\ln \varphi_n(T) = -i \sum_{p\leqslant r} \frac{L_n(p)\, T}{p} + \int\limits_{R_s} (e^{iTX}-1)\, dQ_n + o(1) =$$

$$= i\Gamma_n T + \int\limits_{R_s} \left(e^{iTX} - 1 - \frac{iTX}{1+|X|^2}\right) dQ_n + o(1),$$

где

$$\Gamma_n T = \int\limits_{R_s} \frac{TX}{1+|X|^2}\, dQ_n - \sum_{p\leqslant r} \frac{L_n(p)\, T}{p}. \tag{8.5}$$

Таким образом, вопрос о сходимости законов распределения сумм (8.3) сводится к вопросу о сходимости безгранично делимых законов, определенных посредством логарифмов характеристических функций

$$i\Gamma_n T + \int\limits_{R_s} \left(e^{iTX} - 1 - \frac{iTX}{1+|X|^2}\right) dQ_n.$$

Последний вопрос мы рассмотрим при помощи леммы 8.1.

Во-первых,

$$\sum_{\substack{r<p\leqslant n \\ |L_n(p)|\geqslant\varepsilon}} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{r<p\leqslant n \\ |f_j(p)|\geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} B_j(n)}} \frac{1}{p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j^2(n)} \sum_{r<p\leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} = \frac{s}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{B_j^2(r)}{B_j^2(n)}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Во-вторых, из (8.5) следует, что

$$\Gamma_n = \sum_{p\leqslant r} \left(\frac{L_n(p)}{p\,(1+|L_n(p)|^2)} - \frac{L_n(p)}{p}\right) = -\sum_{p\leqslant r} \frac{|L_n(p)|^2}{p\,(1+|L_n(p)|^2)}\, L_n(p).$$

Согласно подбору $r'_j(n)$ имеем:

$$\left| \sum_{r<p\leqslant n} \frac{L_n(p)}{p} \frac{|L_n(p)|^2}{1+|L_n(p)|^2} \right| \leqslant \sum_{r<p\leqslant n} \frac{|L_n(p)|}{p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j(n)} \sum_{r<p\leqslant n} \frac{|f_j(p)|}{p} \leqslant \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j(n)} \left(\sum_{r<p\leqslant n} \frac{1}{p} \cdot \sum_{r<p\leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= B \sum_{j=1}^{s} \left(\ln \frac{\ln n}{\ln r} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{B_j^2(r)}{B_j^2(n)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= B \sum_{j=1}^{s} \left(\ln \frac{\ln n}{\ln r'_j(n)} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_j^{\frac{1}{2}}(n) = o(1).$$

Компоненты вектора Γ_n и

$$-\sum_{p\leqslant n} \frac{|L_n(p)|^2}{p(1+|L_n(p)|^2)} L_n(p)$$

отличаются, таким образом, лишь на величину порядка $o(1)$.

Наконец, имеем:

$$\int\limits_{0<|X|<\varepsilon} (TX)^2 dQ_n = \sum_{\substack{p\leqslant r \\ |L_n(p)|<\varepsilon}} \frac{1}{p} \left(TL_n(p) \right)^2.$$

Но

$$\sum_{\substack{r<p\leqslant n \\ |L_n(p)|<\varepsilon}} \frac{1}{p} \left(TL_n(p) \right)^2 \leqslant |T|^2 \sum_{r<p\leqslant n} \frac{1}{p} |L_n(p)|^2 =$$

$$= |T|^2 \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j^2(n)} \sum_{r<p\leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} = |T|^2 \sum_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{B_j^2(r)}{B_j^2(n)} \right) = o(1).$$

Из всего сказанного и леммы 8.1 следует, что условия теоремы необходимы и достаточны для сходимости законов распределения сумм (8.3), а также

$$\nu_n \left\{ \frac{f_1(m)_r - A_1(r)}{B_1(n)} < x_1, \ \ldots, \ \frac{f_s(m)_r - A_s(r)}{B_s(n)} < x_s \right\} \qquad (8.6)$$

к предельному, причем в случае существования предельного закона он определяется указанным в формулировке теоремы способом. Нам остается показать, что предельные законы для (8.2) и (8.6) могут существовать лишь одновременно и должны совпадать.

Из леммы 3.1 имеем, что для любого $\varepsilon>0$

$$\nu_n\left\{\left|\left(f_j(m)-A_j(n)\right)-\left(f_j(m)_r-A_j(r)\right)\right|\geqslant\varepsilon B_j(n)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_{59}}{\varepsilon^2}\left(1-\frac{B_j^2(r)}{B_j^2(n)}\right).$$

Отсюда, если обозначим для краткости функцию распределения (8.2) через $\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)$, а (8.6) через $\Phi_n^{(r)}(x_1, \ldots, x_s)$, очевидно, следует:

$$\Phi_n^{(r)}(x_1-\varepsilon, \ldots, x_s-\varepsilon)-\frac{c_{59}}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{s}\left(1-\frac{B_j^2(r)}{B_j^2(n)}\right)\leqslant\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)\leqslant$$

$$\leqslant\Phi_n^{(r)}(x_1+\varepsilon, \ldots, x_s+\varepsilon)+\frac{c_{59}}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{s}\left(1-\frac{B_j^2(r)}{B_j^2(n)}\right).$$

Поэтому, если предельный закон для (8.6) существует и равен $\Phi(x_1, \ldots, x_s)$, то

$$\Phi(x_1-\varepsilon, \ldots, x_s-\varepsilon)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\Phi(x_1, \ldots, x_s)\leqslant\Phi(x_1+\varepsilon, \ldots, x_s+\varepsilon)$$

в предположении, что $(x_1-\varepsilon, \ldots, x_s-\varepsilon)$ и $(x_1+\varepsilon, \ldots, x_s+\varepsilon)$ являются „неисключенными" точками $\Phi(x_1, \ldots, x_s)$. Следовательно, во всех „неисключенных" точках $(x_1, \ldots, x_s)$ закона $\Phi(x_1, \ldots, x_s)$

$$\Phi_n(x_1, \ldots, x_s)\to\Phi(x_1, \ldots, x_s).$$

Совершенно аналогично из существования предельного закона для (8.2) следует существование предельного закона для (8.6) и совпадение обоих законов.

Теорема 8.2. *Пусть* $a_1, \ldots, a_s$ — *различные между собой фиксированные целые неотрицательные числа,* $f_1(m), \ldots, f_s(m)$

— сильно аддитивные функции из класса H. Для того чтобы при $n \to \infty$ функции распределения

$$\nu_n \left\{ \frac{f_1(m+a_1) - A_1(n)}{B_1(n)} < x_1, \ldots, \frac{f_s(m+a_s) - A_s(n)}{B_s(n)} < x_s \right\} \quad (8.7)$$

сходились к предельной в каждой „неисключенной" точке, необходимо и достаточно, чтобы к предельным законам сходились законы

$$\nu_n \left\{ \frac{f_j(m) - A_j(n)}{B_j(n)} < x \right\} \qquad (j = 1, \ldots, s),$$

т. е. чтобы существовали неотрицательные вполне аддитивные функции множества $Q_j(E)$ $(j=1, \ldots, s)$, определенные для всех одномерных борелевских множеств E, не содержащих 0, постоянные $\gamma^{(j)}$, σ_j $(j=1, \ldots, s)$ такие, что

1° *для всякого интервала непрерывности I, $0 \notin \overline{I}$, функции $Q_j(E)$*

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ \frac{f_j(p)}{B_j(n)} \in I}} \frac{1}{p} \to Q_j(I) \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

$$2° \quad \frac{1}{B_j(n)} \sum_{p \leqslant n} \frac{f_j^3(p)}{p\left(B_j^2(n) + f_j^2(p)\right)} \to \gamma^{(j)} \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

$$3° \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{B_j^2(n)} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ |f_j(p)| < \varepsilon B_j(n)}} \frac{f_j(p)}{p} \to \sigma_j \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Предельный закон для (8.7) *равен $F_1(x_1) \ldots F_s(x_s)$, где $F_j(x)$ — одномерный закон распределения, являющийся предельным для*

$$\nu_n \left\{ \frac{f_j(m) - A_j(n)}{B_j(n)} < x \right\};$$

логарифм характеристической функции $\ln \varphi_j(t)$ закона $F_j(x)$ определяется формулой

$$\ln \varphi_j(t) = i\gamma_j t - \frac{1}{2} \sigma_j t^2 + \int_{|x|>0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) dQ_j. \quad (8.8)$$

равномерно при $|T| \leqslant t$ для всякого конечного $t > 0$. Вводим функции множества $Q^{(n)}(E)$, определенные для всех борелевских множеств E в R_s:

$$Q^{(n)}(E) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{q \\ L_{nj}(q) \in E}} \frac{1}{q}.$$

Тогда

$$\ln \varphi_n(T) = -iM_n(q)\,T + \int_{R_s} (e^{iTX} - 1)\, dQ^{(n)} + o(1) =$$

$$= i\Gamma_n T + \int_{R_s} \left(e^{iTX} - 1 - \frac{iTX}{1+|X|^2}\right) dQ^{(n)} + o(1),$$

где

$$\Gamma_n T = \int_{R_s} \frac{TX}{1+|X|^2}\, dQ^{(n)} - \sum_{q} M_n(q)\,T,$$

и опять вопрос сводится к рассмотрению предельного поведения безгранично делимых законов. Те же рассуждения, как и в доказательстве теоремы 8.1, дают, что необходимыми и достаточными условиями сходимости законов (8.7) к предельному являются: существование неотрицательной вполне аддитивной функции множества $Q(E)$, определенной для всех борелевских множеств E в R_s, не содержащих начала координат, постоянного вектора Γ и квадратичной формы $\sigma(T)$ таких, что

1° для всякого интервала непрерывности I, $0 \notin \bar{I}$, функции $Q(E)$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ L_{nj}(p) \in I}} \frac{1}{p} \to Q(I) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$2° \ -\sum_{j=1}^{s} \sum_{p \leqslant n} \frac{|L_{nj}(p)|^2}{p\,(1+|L_{nj}(p)|^2)}\, L_{nj}(p) \to \Gamma \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$3° \ \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ |L_{nj}(p)| < \varepsilon}} \frac{1}{p} \left(TL_{nj}(p)\right)^2 \to \sigma(T) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$L_{n1}(p)=\left(\frac{f_1(p)}{B_1(n)},\ 0,\ \ldots,0,\ 0\right),$$

$$L_{n2}(p)=\left(0,\ \frac{f_2(p)}{B_2(n)},\ \ldots,\ 0,\ 0\right),$$

. . . .

$$L_{ns}(p)=\left(0,\ 0,\ \ldots,0,\ \frac{f_s(p)}{B_s(n)}\right).$$

Определим функцию $r=r(n)$ точно так же, как в доказательстве теоремы 8.1. Воспользуемся полем вероятностей, введенным в начале § 5. Получим, что функция распределения

$$\nu_n\left\{\frac{f_1(m+a_1)_r-A_1(r)}{B_1(n)}<x_1,\ \ldots,\ \frac{f_s(m+a_s)_r-A_s(r)}{B_s(n)}<x_s\right\}$$

лишь на величину $o(1)$, где оценка равномерна по $x_1,\ldots,x_s$, отличается от закона распределения суммы независимых случайных величин

$$\sum_q\left(\Xi_{nq}-M_n(q)\right). \tag{8.9}$$

Здесь Ξ_{nq} — случайный вектор, принимающий значения

$L_{nj}(q)$ $(j=1,\ldots,s)$ с вероятностями $\frac{1}{q}$,

$(0,\ldots,0)$ с вероятностью $1-\frac{s}{q}$;

$$M_n(q)=\frac{1}{q}\left(\frac{f_1(q)}{B_1(n)},\ \ldots,\ \frac{f_s(q)}{B_s(n)}\right).$$

Характеристическая функция $\varphi_n(T)$ для суммы (8.9) равна

$$\varphi_n(T)=\prod_q e^{-iM_n(q)T}\left(1-\frac{s}{q}+\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}e^{iL_{nj}(q)T}\right).$$

Аналогично, как в доказательстве теоремы 8.1, имеем, что

$$\ln\varphi_n(T)=-iM_n(q)\,T+\frac{1}{q}\left(\sum_{j=1}^{s}e^{iL_{nj}(q)T}-1\right)+o(1)$$

Логарифм характеристической функции $\ln \varphi (T)$ предельного закона вычисляется по формуле

$$\ln \varphi (T) = i\Gamma T - \frac{1}{2}\sigma (T) + \int\limits_{|X|>0} \left(e^{iTX} - 1 - \frac{iTX}{1+|X|^2}\right) dQ.$$

При этом ясно, что функция $Q(E)$ отлична от нуля лишь на координатных осях в R_s. Обозначим через $Q_j(E_j)$ $(j=1, \ldots, s)$ соответствующие „одномерные компоненты" функции $Q(E)$. Пусть $\Gamma = (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(s)})$, $T = (t_1, \ldots, t_s)$. Очевидно, что $\sigma (T)$ имеет вид $\sigma_1^2 t_1^2 + \ldots + \sigma_s^2 t_s^2$.

Непосредственно видно, что необходимым и достаточным условием сходимости (8.7) к предельному закону является выполнение условий 1°, 2°, 3° теоремы и что

$$\ln \varphi (T) = \sum_{j=1}^{s} \ln \varphi_j (t_j),$$

где $\ln \varphi_j (t)$ выражается формулой (8.8). Из теоремы 8.1 при $s=1$ получаем, что $\ln \varphi_j (t)$ является логарифмом характеристической функции предельного закона для

$$\nu_n \left\{ \frac{f_j(m) - A_j(n)}{B_j(n)} < x \right\}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим отдельно случай предельного нормального распределения. Тогда функция $Q(E)$ в (8.1) равна нулю для всех E, не содержащих начала координат. Поэтому условия 1° теорем 8.1 и 8.2 приобретают вид соответственно

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ |L_n(p)| \geq \varepsilon}} \frac{1}{p} \to 0, \tag{8.10}$$

где

$$L_n(p) = \left(\frac{f_1(p)}{B_1(n)}, \ldots, \frac{f_s(p)}{B_s(n)}\right),$$

и

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ |f_j(p)| \geq \varepsilon B_j(n)}} \frac{1}{p} \to 0 \qquad (j=1, \ldots, s) \tag{8.11}$$

при $n \to \infty$ для всякого $\varepsilon > 0$. Так как

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ |f_j(p)| \geqslant \varepsilon B_j(p)}} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ |L_n(p)| \geqslant \varepsilon}} \frac{1}{p} \qquad (j=1, \ldots, s),$$

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ |L_n(p)| \geqslant \varepsilon}} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ |f_j(p)| \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{s}} B_j(n)}} \frac{1}{p},$$

то условия (8.10) и (8.11) равносильны.

Далее, в случае нормального закона

$$\frac{1}{B_j(n)} \sum_{p \leqslant n} \frac{|f_j(p)|^3}{p\left(B_j^2(n)+f_j^2(p)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B_j^3(n)} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ |f_j(p)| < \varepsilon B_j(n)}} \frac{|f_j(p)|^3}{p} + \frac{1}{B_j(n)} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ |f_j(p)| \geqslant \varepsilon B_j(n)}} \frac{|f_j(p)|}{p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{B_j^2(n)} \sum_{p \leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} + \frac{1}{B_j(n)} \left(\sum_{p \leqslant n} \frac{f_j^2(p)}{p} \cdot \sum_{\substack{p \leqslant n \\ |f_j(p)| \geqslant \varepsilon B_j(n)}} \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varepsilon + \left(\sum_{\substack{p \leqslant n \\ |f_j(p)| \geqslant \varepsilon B_j(n)}} \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу (8.11) отсюда следует, что

$$\frac{1}{B_j(n)} \sum_{p \leqslant n} \frac{f_j^3(p)}{p\left(B_j^2(n)+f_j^2(p)\right)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Последнее соотношение и оценка

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{|L_n(p)|^3}{p\left(1+|L_n(p)|^2\right)} = B \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j(n)} \sum_{p \leqslant n} \frac{|f_j(p)|^3}{p\left(B_j^2(n)+f^2(p)\right)}$$

показывают, что в случае предельного нормального распределения условия 2° обеих теорем являются следствиями условий 1°, причем $\Gamma = (0, \ldots, 0)$, $\gamma^{(j)} = 0$ $(j=1, \ldots, s)$.

Примеры. Введем сильно аддитивные арифметические функции $\varkappa(m)$ и $\lambda(m)$. Первую определим посредством равенства

$$\varkappa(m) = \sum_{p|m} \ln\ln p.$$

Для определения функции $\lambda(m)$ выделим множество простых чисел Q такое, чтобы

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in Q}} 1 \sim \frac{n}{\ln n\cdot \ln\ln n},$$

и положим

$$\lambda(p) = \begin{cases} \ln\ln p, & \text{если} \quad p\in Q, \\ 0, & \text{если} \quad p\notin Q. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что для функции $\varkappa(m)$

$$A(n) = \frac{1}{2}(\ln\ln n)^2 + B\ln\ln n, \quad B(n) \sim \frac{1}{\sqrt{3}}(\ln\ln n)^{\frac{3}{2}},$$

а для $\lambda(m)$

$$A(n) \sim \ln\ln n, \quad B(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\ln n.$$

Для фиксированного целого положительного числа a из теорем 8.1 и 8.2 имеем:

$$\nu_n\left\{\frac{\omega(m)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} < x, \quad \frac{\varkappa(m)-\frac{1}{2}(\ln\ln n)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\ln\ln n)^{\frac{3}{2}}} < y\right\} \to$$

$$\to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-2(u^2+w^2+\sqrt{3}\,uw)}\,du\,dw,$$

$$\nu_n\left\{\frac{\omega(m)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} < x, \quad \frac{\omega(m+a)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} < y\right\} \to G(x)\,G(y), \qquad (8.12)$$

$$\nu_n\left\{\tau_k(m) < k^{\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}}, \quad \tau_k(m+a) < k^{\ln\ln n + y\sqrt{\ln\ln n}}\right\} \to$$

$$\to G(x)\;G(y),$$

$$\nu_n\left\{\lambda(m) < x\ln\ln n, \quad \frac{\omega(m)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} < y\right\} \to F(x-1)\;G(y),$$

где $F(x)$ определяется функцией

$$K(u)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad u\leqslant 0, \\ u^2 & \text{при} \quad 0<u\leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad u>1 \end{cases}$$

по формуле (4.9), т. е. характеристической функцией

$$\exp\left\{-2it+2\int_0^1 \frac{e^{itu}-1}{u}\,du\right\}.$$

Из наших результатов можно сделать несколько интересных выводов о некоторых бинарных аддитивных задачах. В частности, формула (8.12) дает, что число решений уравнения

$$m_1-m_2=2$$

в целых положительных m_1, $m_2\leqslant n$, имеющих меньше чем $\ln\ln n$ различных простых делителей, равно $\frac{1}{4}\,n\left(1+o(1)\right)$.

В заключение отметим, что прием Г. Крамера и Г. Вольда [29, 30, 43], позволяющий свести некоторые вопросы о многомерных функциях распределения к соответствующим вопросам об одномерных функциях распределения, может быть использован и для получения ряда многомерных предельных теорем для арифметических аддитивных функций путем сведения их к своим частным случаям для одного измерения. Наконец, теоремы 8.1 и 8.2 можно обобщить, рассматривая вместо s-мерных функций распределения (8.2) и (8.7)

$$\nu_n\left\{\left(\frac{f_1(m)-A_1(n)}{B_1(n)},\ \ldots,\ \frac{f_s(m)-A_s(n)}{B_s(n)}\right)\in E\right\},$$

$$\nu_n\left\{\left(\frac{f_1(m+a_1)-A_1(n)}{B_1(n)},\ \ldots,\ \frac{f_s(m+a_s)-A_s(n)}{B_s(n)}\right)\in E\right\},$$

где E — борелевское множество в R_s.

для сумм независимых случайных величин. Однако переход от ,,урезанной" функции $f(m)_r$ к самой функции $f(m)$ вносит некоторую неточность, вследствие чего точность предельных теорем для $f(m)$ снижается по сравнению с соответствующими теоремами теории вероятностей.

Для того чтобы избежать этого снижения точности, приходится отказаться от урезания. Однако тогда этот метод, как отмечено в параграфе 2, ведет к предельным теоремам для сумм зависимых случайных величин, причем современное состояние последних не позволяет получить удовлетворительных результатов.

Оказывается, что для некоторого специального класса аддитивных функций эти трудности можно обойти путем привлечения методов аналитической теории чисел вместо элементарных арифметических методов типа решета.

Для простоты мы рассмотрим более подробно лишь функцию $\omega(m)$. Мы докажем не только гипотезу Левека, но и дадим асимптотическое разложение ее функции распределения, а также теорему о больших уклонениях от ее среднего значения.

Общие леммы. **Лемма 9.1.** *Пусть* $y>x>0$, $y\geqslant 2$, z — *комплексное число*, $|z|\leqslant c_{60}$. *Тогда*

$$\sum_{x<m\leqslant y} z^{\omega(m)}=B(y-x)(\ln y)^{|z|}+By^{1-1/([|z|]+1)}.$$

Доказательство. Пусть $k=[|z|]+1$. Имеем, очевидно, что

$$|z|^{\omega(m)}\leqslant\prod_{p\mid m}k=\prod_{p^\alpha\| m}k\leqslant\prod_{p^\alpha\| m}\binom{k+\alpha-1}{\alpha}=\tau_k(m).$$

Лемма следует из известных оценок для $\tau_k(m)$.

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$, определяемой в области $\sigma>1$ рядом

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}.$$

9. МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

В параграфе 6 мы изучали быстроту сходимости функции распределения аддитивной арифметической функции на отрезке натурального ряда $\{1, \ldots, n\}$ к предельному закону. Изложенный метод позволил оценить быстроту сходимости для весьма широкого класса функций, однако точность результатов отстает от соответствующих аналогов для случайных величин. Так, в случае функции $\omega(m)$ мы получили, что

$$\nu_n\left\{\omega(m) < \ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}\right\} =$$
$$= G(x) + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\ln\ln\ln n + 1\right),$$

в то время как по аналогии с теорией вероятностей следовало бы ожидать, что остаточный член должен быть $B(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$ (гипотеза В. Левека [77]). Наша оценка при $|x| < (2\ln\ln\ln\ln n)^{\frac{1}{2}}$ на множитель $\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\ln\ln\ln n$ отстает от предполагаемой. Аналогично обстоит дело и с теоремами о больших уклонениях.

Причина этого расхождения кроется, по-видимому, в применяемом методе. Сначала мы рассматриваем „урезанные" функции $f(m)_r$, которые с большой точностью приближения можно считать суммой довольно простых независимых случайных величин. Применение теорем теории вероятностей к сумме этих величин дает предельную теорему для „урезанных" функций $f(m)_r$, точность которой такая же, как и

Хорошо известно, что $\zeta(s)$ можно продолжить аналитически на всю плоскость s. Она является однозначной аналитической функцией, имеющей единственной особенностью (помимо бесконечно удаленной точки) простой полюс в точке $s=1$ с вычетом 1. Существует такая константа c_{61}, что в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_{61}}{\ln(|t|+2)}$$

функция $\zeta(s)$ не имеет нулей и для нее справедлива оценка

$$\zeta^{\pm 1}(s) = \begin{cases} B\ln(|t|+2) & \text{при} \quad |t| \geqslant 1, \\ B|s-1|^{\mp 1} & \text{при} \quad |t| \leqslant 1. \end{cases}$$

Лемма 9.2. *Для комплексных* z, $|z| \leqslant c_{60}$, $x \geqslant 2$

$$\sum_{m \leqslant x} z^{\omega(m)} = \left(\varphi(z) + \frac{B}{\ln x}\right) x (\ln x)^{z-1},$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 + \frac{z}{p-1}\right)$$

— целая функция от z, $\Gamma(z)$ *— гамма-функция.*

Доказательство (ср. [86, 90]). Рассмотрим производящий ряд Дирихле

$$Z(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{\omega(m)}}{m^s},$$

сходящийся абсолютно в силу леммы 9.1 при $\sigma > 1$. Так как функция $\omega(m)$ является аддитивной, $\omega(1)=0$, $\omega(p^\alpha)=1$ $(\alpha=1, 2, \ldots)$, то при $\sigma>1$

$$Z(s) = \prod_p \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z^{\omega(p^\alpha)}}{p^{\alpha s}} = \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s-1}\right).$$

Положим

$$h(s) = Z(s)\zeta^{-z}(s).$$

При $\sigma > 1$

$$h(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z \left(1 + \frac{z}{p^s-1}\right).$$

Если $p>p_0=p_0(z)$, $\sigma>\frac{1}{2}$, то

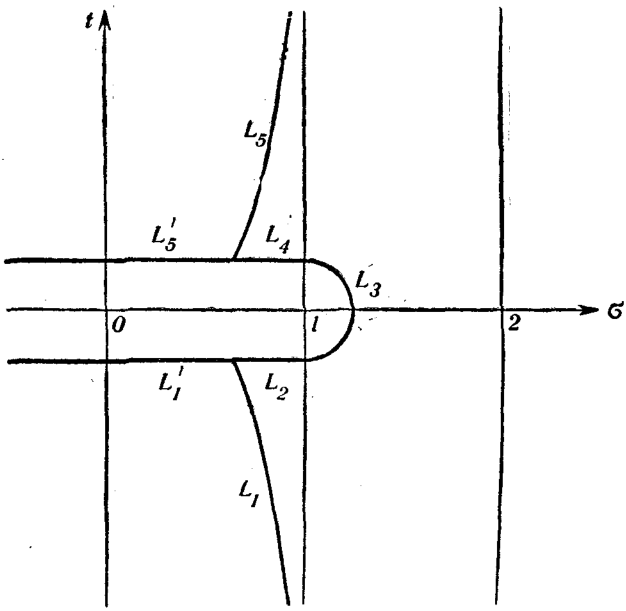
$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^z\left(1+\frac{z}{p^s-1}\right)\neq 0.$$

Ряд

$$\sum_{p>p_0}\left\{z\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)+\ln\left(1+\frac{z}{p^s-1}\right)\right\}$$

сходится равномерно при любом положительном ε в области $\sigma>\frac{1}{2}+\varepsilon$. Следовательно, $h(s)$ является регулярной при $\sigma>\frac{1}{2}$; кроме того, в области $\sigma>\frac{1}{2}+\varepsilon$ имеет место оценка

$$|h(s)|\leqslant c_{62}(\varepsilon). \tag{9.2}$$



Фиг. 2.

Обозначим через L_j и L_j' следующие линии (фиг. 2):

L_1 $\qquad s=1-\frac{c_{63}}{\ln(|t|+2)}+it, \quad -\infty<t<-\delta,$

L_2 $\qquad s=\sigma-i\delta, \quad 1-\frac{c_{63}}{\ln(\delta+2)}\leqslant\sigma\leqslant 1,$

$$L_3 \qquad s=\delta e^{i\varphi}, \quad -\frac{1}{2}\pi<\varphi<\frac{1}{2}\pi,$$

$$L_4 \qquad s=\sigma+i\delta, \quad 1-\left|\frac{c_{63}}{\ln(\delta+2)}\right|\leqslant\sigma\leqslant 1,$$

$$L_5 \qquad s=1-\frac{c_{63}}{\ln(t+2)}+it, \quad \delta<t<\infty,$$

$$L_1' \qquad s=\sigma-i\delta, \quad -\infty<\sigma<1-\frac{c_{63}}{\ln(\delta+2)},$$

$$L_5' \qquad s=\sigma+i\delta, \quad -\infty<\sigma<1-\frac{c_{63}}{\ln(\delta+2)},$$

где $\delta=\ln^{-1}x$ и $c_{63}<\frac{1}{4}\ln 2$. Согласно приведенным выше свойствам функции $\zeta(s)$ постоянное c_{63} можно подобрать так, чтобы функция $Z(s)=h(s)\zeta^z(s)$ была регулярной на контуре $L=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4\cup L_5$ и справа от него и чтобы для нее имели место оценки

$$Z(s)=\begin{cases} B\left\{\ln(|t|+2)\right\}^{|\operatorname{Re} z|} & \text{при} \quad |t|\geqslant 1, \\ B|s-1|^{-\operatorname{Re} z} & \text{при} \quad |t|\leqslant 1. \end{cases} \tag{9.3}$$

Воспользуемся интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^s\,ds}{s^2}=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0<y\leqslant 1, \\ \ln y & \text{при} \quad y\geqslant 1. \end{cases}$$

Ввиду равномерной сходимости ряда (9.1) при $\sigma=2$ имеем тождество

$$T(x)=\sum_{m\leqslant x} z^{\omega(m)}\ln\frac{x}{m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^s}{s^2}Z(s)\,ds.$$

Оценки (9.3) позволяют заменить контур последнего интеграла контуром L.

Оценим сначала часть интеграла по $L_1\cup L_5$. Имеем согласно оценкам (9.3):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1\cup L_5}\frac{x^s}{s^2}Z(s)\,ds=B\int_{\delta}^{1}x^{1-c_{63}/\ln(t+2)}\,dt+$$

$$+B\left(\int_{1}^{\exp\sqrt{\ln x}}+\int_{\exp\sqrt{\ln x}}\right)x^{1-c_{63}/\ln(t+2)}\,\frac{\left(\ln(t+2)\right)^{|\operatorname{Re} z|}}{t^2}\,dt=$$

$$=B\left\{x^{1-c_{63}/\ln 3}+x\exp\left(-\frac{c_{63}\ln x}{\ln\left(2+\exp\sqrt{\ln x}\right)}\right)\int_{1}^{\infty}\frac{\left(\ln(t+2)\right)^{|\operatorname{Re} z|}}{t^2}\,dt+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}\right)\int_{1}^{\infty}\frac{\left(\ln(t+2)\right)^{|\operatorname{Re} z|}}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt\right\}=$$

$$=Bx\exp\left(-c_{64}\sqrt{\ln x}\right).$$

Следовательно,

$$T(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2\cup L_3\cup L_4}\frac{x^s}{s^2}Z(s)\,ds+Bx\exp\left(-c_{64}\sqrt{\ln x}\right). \tag{9.4}$$

Пусть

$$S(x)=\sum_{m\leqslant x}z^{\omega(m)}.$$

Тогда

$$T(x)=\int_{1}^{x}\frac{S(u)}{u}\,du.$$

Положим, далее,

$$\Delta=x\,(\ln x)^{\operatorname{Re} z-|z|-2}$$

и рассмотрим тождество

$$S(x)=\frac{T(x+\Delta)-T(x)}{\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)}-\frac{1}{\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)}\int_{x}^{x+\Delta}\frac{S(y)-S(x)}{y}\,dy. \tag{9.5}$$

Согласно лемме 9.1

$$\int_{x}^{x+\Delta}\frac{S(y)-S(x)}{y}\,dy=B\left\{\Delta\,(\ln x)^{|z|}+x^{1-1/(|z|+1)}\right\}\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)=$$

$$=Bx\,(\ln x)^{\operatorname{Re} z-2}\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right). \tag{9.6}$$

Из этой оценки следует:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2\cup L_3\cup L_4} x^s H(s)\,ds = B\int\limits_{1-c_{63}/\ln(\delta+2)}^{1} x^{-\sigma}\left((\sigma-1)^2+\delta^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,z} d\sigma +$$

$$+Bx^{1+\delta}\,\delta^{2-\mathrm{Re}\,z} =$$

$$= Bx\int\limits_{0}^{c_{63}/\ln(\delta+2)} x^{-\sigma}(\sigma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,z} d\sigma + Bx(\ln x)^{\mathrm{Re}\,z-2} =$$

$$= Bx\delta^{1-\mathrm{Re}\,z}\int\limits_{0}^{\delta} x^{-\sigma}\,d\sigma + Bx\int\limits_{\delta}^{\infty} x^{-\sigma}\,\sigma^{1-\mathrm{Re}\,z} d\sigma +$$

$$+Bx(\ln x)^{\mathrm{Re}\,z-2} =$$

$$= Bx\left(\int\limits_{1}^{\infty} e^{-y}y^{1-\mathrm{Re}\,z}dy+1\right)(\ln x)^{\mathrm{Re}\,z-2} =$$

$$= Bx(\ln x)^{\mathrm{Re}\,z-2}. \tag{9.11}$$

Далее,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1'\cup L_5'}\frac{x^s\,ds}{(s-1)^z} = B\int\limits_{c_{63}}^{\infty} x^{-\sigma}\,\sigma^{1-\mathrm{Re}\,z}\,d\sigma. \tag{9.12}$$

При $\mathrm{Re}\,z \geqslant 0$ последний интеграл равен

$$B\int\limits_{c_{63}}^{\infty} x^{1-\sigma}\,d\sigma = Bx^{1-c_{63}}. \tag{9.13}$$

Такая же оценка справедлива и при $\mathrm{Re}\,z<0$. В самом деле,

$$\int\limits_{c_{63}}^{\infty} x^{1-\sigma}\,\sigma^{-\mathrm{Re}\,z} d\sigma = B\int\limits_{c_{63}}^{2} x^{1-\sigma}d\sigma + \int\limits_{2}^{\infty} x^{1-\sigma}\,\sigma^{-\mathrm{Re}\,z} d\sigma =$$

$$= Bx^{1-c_{63}} + B\int\limits_{2}^{\infty} x^{1-\sigma+\ln\sigma}\,d\sigma =$$

$$= Bx^{1-c_{63}} + B\int\limits_{2}^{\infty} x^{1-\frac{1}{2}\sigma}\,d\sigma = Bx^{c_{65}}c_{65} < 1. \tag{9.14}$$

Так как

$$(x+\Delta)^s - x^s = sx^{s-1}\Delta + Bx^{\sigma-2}\Delta^2,$$

$$\ln^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right) = \frac{x}{\Delta} + B,$$

то из (9.4) следует, что

$$\frac{T(x+\Delta)-T(x)}{\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2\cup L_3\cup L_4} \frac{x^s}{s} Z(s)\,ds +$$

$$+B\Delta \int\limits_{L_2\cup L_3\cup L_4} x^{\sigma-1}|Z(s)||ds| + \frac{Bx^2}{\Delta}\exp\left(-c_{64}\sqrt{\ln x}\right). \quad (9.7)$$

Далее, согласно (9.3)

$$\int\limits_{L_2\cup L_3\cup L_4} x^{\sigma-1}|Z(s)||ds| = B\delta^{1-\operatorname{Re} z} = B(\ln x)^{\operatorname{Re} z-1}. \quad (9.8)$$

Подставляя оценки (9.6), (9.7), (9.8) в формулу (9.5), заключаем, что

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2\cup L_3\cup L_4} \frac{x^s}{s} Z(s)\,ds + Bx(\ln x)^{\operatorname{Re} z-2}. \quad (9.9)$$

Обозначим через $H(s)$ функцию

$$H(s) = \frac{Z(s)}{s} - \frac{h(1)}{(s-1)^z} =$$

$$= \frac{h(s)\left\{\left(\zeta(s)(s-1)\right)^z - 1\right\}}{s(s-1)^z} + \frac{h(s)-h(1)}{s(s-1)^z} - \frac{h(1)}{s(s-1)^{z-1}}. \quad (9.10)$$

Из оценки (9.2), свойств $\zeta(s)$ и оценки

$$\frac{h(s)-h(1)}{s-1} = B, \quad \sigma \geqslant \frac{3}{4}, \quad |t| \leqslant 1,$$

справедливой согласно (9.2) и формуле Коши, получаем, что для контура $L_2 \cup L_3 \cup L_4$

$$H(s) = B|s-1|^{1-\operatorname{Re} z}.$$

Из (9.9) ввиду (9.10) – (9.14) следует, что

$$S(x)=\frac{h(1)}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{x^s\,ds}{(s-1)^z}+Bx(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2},$$

где $L'=L_1'\cup L_2\cup L_3\cup L_4\cup L_5'$. Из представления Г-функции контурным интегралом Ганкеля заключаем окончательно, что

$$S(x)=\left(\frac{h(1)}{\Gamma(z)}+\frac{B}{\ln x}\right)x(\ln x)^{z-1}.$$

Для дальнейших рассмотрений нам будет достаточна менее точная оценка по сравнению с полученной в лемме 9.2. Ее, разумеется, можно получить, используя более слабые сведения о дзета-функции Римана.

Лемма 9.3. *Для любых комплексных* z

$$e^z=\sum_{l=0}^{k}\frac{z^l}{l!}+\frac{\Theta\,|z|^{k+1}}{(k+1)!}e^{|z|}\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots),\tag{9.15}$$

где $|\Theta|\leqslant 1$.

Доказательство.

$$\left|e^z-\sum_{l=0}^{k}\frac{z^l}{l!}\right|=\left|\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{z^l}{l!}\right|\leqslant\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{|z|^l(k+1)!}{(k+l+1)!}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{|z|^l}{l!}=\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}e^{|z|}.$$

Лемма 9.4. *Пусть* A, T, ε — *произвольные положительные постоянные,* $\Phi(x)$ — *неубывающая, чисто разрывная функция и* $\Psi(x)$ — *функция с ограниченным изменением,* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ — *их преобразования Фурье-Стильтьеса. Если*

1) $\Phi(-\infty)=\Psi(-\infty)=0,\ \Phi(\infty)=\Psi(\infty)$,

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi(x)-\Psi(x)\right|dx<\infty$,

3) *функции* $\Phi(x)$ *и* $\Psi(x)$ *могут иметь разрывы только в точках* $x=x_\nu$ $(x_\nu<x_{\nu+1};\ \nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, *и существует такое* $l>0$, *что* $\min(x_{\nu+1}-x_\nu)\geqslant l$,

4) *всюду, за исключением* $x=x_\nu\,(\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$,

$|\Psi'(x)|\leqslant A$,

5) $$\int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t} \right| dt = \varepsilon,$$

то каждому числу $c>1$ *соответствуют два конечных числа* $c_{66}(c)$ *и* $c_{67}(c)$, *зависящих только от* c *и таких, что*

$$\left| \Phi(x) - \Psi(x) \right| \leqslant \frac{c\varepsilon}{2\pi} + c_{66}(c)\, \frac{A}{T}, \tag{9.16}$$

как только $Tl \geqslant c_{67}(c)$.

Доказательство этой леммы Эссеена см. в [65, 11].

Асимптотическое разложение. Обозначения. Положим

$$R_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{z\omega(m)}.$$

Функция $R_n(z)$ является, очевидно, целой, причем согласно лемме 9.2

$$R_n(z) = \left\{ \varphi(e^z) + \frac{B}{\ln n} \right\} (\ln n)^{e^z-1} \tag{9.17}$$

в области $\operatorname{Re} z \leqslant c_{68}$. Функция $\varphi(e^z)$ — также целая с нулями в точках

$$\ln k + (2l+1)\pi i \qquad (k=1, 2, \ldots; \; l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поэтому при $\operatorname{Re} z \leqslant c_{68}$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant c_{69} < \pi$ функция

$$F(z) = \ln \varphi(e^z) = \sum_p \left\{ e^z \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \ln\left(1 + \frac{e^z}{p-1}\right) \right\} - \ln \Gamma(e^z)$$

является аналитической, причем имеет место оценка

$$F(z) = B. \tag{9.18}$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} z \leqslant c_{68}$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant c_{69}$

$$R_n(z) = e^{H_n(z)} \left(1 + \frac{B}{\ln n}\right),$$

где

$$H_n(z) = (e^z - 1) \ln\ln n + F(z). \tag{9.19}$$

Кроме того, функция

$$\Phi_n(z) = \ln R_n(z) = H_n(z) + \frac{B}{\ln n} \tag{9.20}$$

аналитична для указанных z.

$$b_4 = \sum_p \left\{ \ln\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{7}{p^2} + \frac{12}{p^3} - \frac{6}{p^4} \right\} +$$
$$+ 2\gamma - 7\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + 12 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} - 6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4}.$$

Здесь суммы отрицательных четных степеней целых положительных чисел можно выразить через π:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}|,$$

где B_k — числа Бернулли, определяемые соотношением

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} u^k,$$
$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \ldots,$$
$$B_{2k+1} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Обозначим через $P_k(z)$ полиномы, определяемые разложением

$$\exp\left\{ \left(e^{\frac{z}{u}} - 1\right) u^2 + F\left(\frac{z}{u}\right) - uz - \frac{1}{2} z^2 \right\} =$$
$$= \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!\, u^k} \left(\frac{z^2}{(k+1)(k+2)} + b_k \right) \right\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(z)}{u^k}. \tag{9.25}$$

Очевидно, степень полинома $P_k(z)$ равна $3k$. Первые полиномы имеют вид:

$$P_0(z) = 1,$$
$$P_1(z) = z\left(\frac{1}{6} z^2 + b_1\right),$$
$$P_2(z) = \frac{1}{2} z^2 \left\{ \left(\frac{1}{6} z^2 + b_1\right)^2 + \frac{1}{12} z^2 + b_2 \right\},$$
$$P_3(z) = \frac{1}{6} z^3 \left\{ \left(\frac{1}{6} z^2 + b_1\right)^3 + 3\left(\frac{1}{6} z^2 + b_1\right)\left(\frac{1}{12} z^2 + b_2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{20} z^2 + b_3 \right\},$$

По формуле Коши имеем, что в области $|z| \leqslant 1$ для $k=0, 1, 2, \ldots$

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|w|=2} \frac{F(w)\,dw}{(w-z)^{k+1}},$$

$$\Phi_n^{(k)}(z) - H_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|w|=2} \frac{\Phi_n(w) - H_n(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw.$$

Отсюда согласно (9.18) и (9.20) при $|z| \leqslant 1$

$$F^{(k)}(z) = Bk!, \tag{9.21}$$

$$\Phi_n^{(k)}(z) = H_n^{(k)}(z) + \frac{Bk!}{\ln n}. \tag{9.22}$$

Так как $F(0) = 0$, то

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k z^k}{k!}, \tag{9.23}$$

где ряд сходится при $|z| < \pi$. Согласно (9.21)

$$|b_k| \leqslant c_{70} k! \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9.24}$$

Пользуясь известными соотношениями

$$\left(\ln \Gamma(z)\right)'_{z=1} = -\gamma,$$

$$\left(\ln \Gamma(z)\right)^{(k)}_{z=1} = (-1)^{k+1} k! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

где γ — постоянная Эйлера, легко подсчитать первые коэффициенты b_k:

$$b_1 = \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right\} + \gamma,$$

$$b_2 = \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right\} + \gamma - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

$$b_3 = \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right\} +$$

$$+ \gamma - 3\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3},$$

$$P_4(z)=\frac{1}{24}z^4\left\{\left(\frac{1}{6}z^2+b_1\right)^4+6\left(\frac{1}{6}z^2+b_1\right)^2\left(\frac{1}{12}z^2+b_2\right)+\right.$$
$$+4\left(\frac{1}{6}z^2+b_1\right)\left(\frac{1}{20}z^2+b_3\right)+3\left(\frac{1}{12}z^2+b_2\right)^2+$$
$$\left.+\frac{1}{30}z^2+b_4\right\}.$$

Положим

$$Q_k(z)=\sum_{l=0}^{k}\frac{P_l(z)}{\sigma^l}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$\sigma=\sqrt{\ln\ln n}\,.$$

Определим периодические функции $E_k(u)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ с периодом 1 посредством тригонометрических рядов

$$E_k(u)=(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i\lambda u}}{(2\pi i\lambda)^k}, \tag{9.26}$$

где штрих означает, что при суммировании значение $\lambda=0$ исключается. При $k>1$ ряд сходится абсолютно и равномерно для всех вещественных u. Следовательно, он представляет непрерывную ограниченную функцию. Ряд для $E_1(u)$ сходится в смысле, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\lambda=-n}^{n}{}'\frac{e^{2\pi i\lambda u}}{2\pi i\lambda}$$

для всех u. При $u=0$ этот предел равен 0, однако нам удобно будет считать, что

$$E_1(0)=E_1(-0)=-\frac{1}{2}.$$

Для $k>1$

$$E_k'(u)=(-1)^{k-1}E_{k-1}(u).$$

При $k>2$ это равенство имеет место для всех u, а при $k=2$ лишь для нецелых значений u. Для целых значений $u=m$ и $k\geqslant 2$

$$E_k(m)=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}}{(2\pi i)^k}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda^k}=\frac{|B_k|}{k!}.$$

Легко подсчитать, что

$$E_1(u) = -u + \frac{1}{2}, \qquad 0<u<1,$$

$$E_2(u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{12}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

$$E_3(u) = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{12}u, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Положим еще

$$E_0(u) = -1.$$

Оценка характеристической функции. **Лемма 9.5.** *Пусть* ν *— целое положительное число,*

$$\psi_n(t) = R_n\left(\frac{it}{\sigma}\right)e^{-it\sigma}.$$

Для вещественных t, $|t| \leqslant \frac{\sigma}{8\nu}$

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}Q_\nu(it) + B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{\nu+1}(c_{70}+t^2)^{\nu+1}e^{-\frac{1}{4}t^2} + \\ + \frac{B|t|}{\sigma\ln n}$$

равномерно по t *и* $n > c_{71}$, *где* c_{71} *— достаточно большая абсолютная постоянная.*

Доказательство. Имеем согласно (9.19), (9.20), (9.22), (9.23), что при $|z| \leqslant \frac{1}{2}$

$$\Phi_n(z) = \sigma^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\left(\Phi_n^{(k)}(z) - H_n^{(k)}(z)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^2+b_k}{k!}z^k + \frac{B}{\ln n}\sum_{k=1}^{\infty}|z|^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^2+b_k}{k!}z^k + \frac{B|z|}{\ln n}.$$

Следовательно, при $|t| \leqslant \frac{1}{2}\sigma$

$$\psi_n(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!\,\sigma^k}\left(b_k - \frac{t^2}{(k+1)(k+2)}\right) + \frac{B|t|}{\sigma\ln n}\right\}.$$

Разложим $e^{T(x)}$ в ряд по степеням x. Получим согласно (9.25)

$$e^{T(x)}=\sum_{k=0}^{\nu} P_k(it)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^k+U(x),$$

где $U(x)=O\left(|x|^{\nu+1}\right)$ при $x\to 0$. Далее, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{T^k(x)}{k!}=\sum_{k=0}^{\nu}P_k(it)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^k+U_1(x), \tag{9.33}$$

где в $U_1(x)$ входят степени x, начиная с $\nu+1$. Имеем согласно (9.31) при $|t|\leqslant\frac{\sigma}{2\nu}$

$$\left|U_1(x)\right|\leqslant\sum_{l=1}^{\nu}\frac{(c_{70}+t^2)^l}{l!}\left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^l\sum_{k=\nu+1-}^{\infty}\left(\frac{l\,|tx|}{\sigma}\right)^k\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=1}^{\nu}\frac{(c_{70}+t^2)^l}{l!}\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{\nu+1}\frac{\nu^{\nu+1-l}}{1-\frac{\nu|t|}{\sigma}}=$$

$$=B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{\nu+1}(c_{70}+t^2)^{\nu}. \tag{9.34}$$

Согласно (9.30) при $|t|\leqslant\frac{\sigma}{8}$

$$\left|T(x)\right|^{\nu+1}e^{|T(x)|}=B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{\nu+1}(c_{70}+t^2)^{\nu+1}\times$$

$$\times\exp\left\{2(c_{70}+t^2)\frac{|t|}{\sigma}\right\}=B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{\nu+1}(c_{70}+t^2)^{\nu+1}e^{\frac{1}{4}t^2}.$$

Подставляя эту оценку, (9.32) и (9.34) в формулу (9.32), получим, что при $|t|\leqslant\frac{\sigma}{8\nu}$

$$e^{T(x)}=\sum_{k=0}^{\nu}P_k(it)\left(\frac{x}{\sigma}\right)^k+B\left(\frac{|t|}{\sigma}\right)^{\nu+1}(c_{70}+t^2)^{\nu+1}e^{\frac{1}{4}t^2}.$$

Отсюда в силу (9.27) и (9.28) при $x=1$ получим лемму.

Лемма 9.6. *При* $|t|\leqslant\varepsilon\sigma$ *в обозначениях леммы* 9.5

$$\psi_n(t)=Be^{-\frac{t^2}{12}}$$

равномерно по $n>c_{71}$ *и* t.

В силу определения функции $\psi_n(t)$ имеет место очевидная оценка $|\psi_n(t)|\leqslant 1$. Поэтому

$$\psi_n(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}t^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!\,\sigma^k}\left(b_k-\frac{t^2}{(k+1)(k+2)}\right)\right\}+$$

$$+\frac{B\,|t|}{\sigma\ln n} \tag{9.27}$$

при $|t|\leqslant\frac{1}{2}\sigma$.

Рассмотрим ряд

$$T(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(itx)^k}{k!\,\sigma^k}\left(b_k-\frac{t^2}{(k+1)(k+2)}\right), \tag{9.28}$$

где x — вещественная переменная, $|x|\leqslant 1$. Этот ряд в силу (9.24) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_{70}+t^2)\left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^k. \tag{9.29}$$

Отсюда, в частности, при $|t|\leqslant\frac{1}{2}\sigma$

$$|T(x)|\leqslant 2\,(c_{70}+t^2)\frac{|t|}{\sigma}. \tag{9.30}$$

Возведем ряд для $T(x)$ и мажорирующий ряд (9.29) в целую положительную степень l. Для степени ряда (9.29) получим

$$(c_{70}+t^2)^l\left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^l\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_l=0}^{\infty}\left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^{k_1+\dots+k_l}.$$

Так как число решений уравнения $k_1+\dots+k_l=k$ в целых неотрицательных $k_1,\ \dots,\ k_l$ не превосходит l^k, то ряд для $T^l(x)$ мажорируется рядом

$$(c_{70}+t^2)^l\left(\frac{|tx|}{\sigma}\right)^l\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{l\,|tx|}{\sigma}\right)^k. \tag{9.31}$$

Согласно лемме 9.3

$$e^{T(x)}=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{T^k(x)}{k!}+B\left|T(x)\right|^{\nu+1}e^{\left|T(x)\right|}. \tag{9.32}$$

Доказательство. Имеем согласно (9.17), что

$$\psi_n(t) = R_n\left(\frac{it}{\sigma}\right) e^{-it\sigma} =$$

$$= \exp\left\{\left(e^{\frac{it}{\sigma}} - 1\right)\sigma^2 - it\sigma\right\}\left\{\varphi\left(e^{\frac{it}{\sigma}}\right) + \frac{B}{\ln n}\right\}.$$

Так как при $|t| \leqslant \pi\sigma$

$$\varphi\left(e^{\frac{it}{\sigma}}\right) = B$$

и для любого вещественного x согласно лемме 9.3

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}ix^3 + \frac{\Theta}{24}x^4, \quad |\Theta| \leqslant 1,$$

то

$$\psi_n(t) = B\exp\left\{-\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6\sigma} + \frac{\Theta t^4}{24\sigma^2}\right\} =$$

$$= B\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right)\right\} = B\exp\left(-\frac{t^2}{12}\right)$$

при $|t| \leqslant \pi\sigma$. Лемма доказана.

Лемма 9.7.

$$G^{(k)}(x) = \frac{g_k(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$g_1(x) = 1,$$

$$g_k(x) = (-x)^{k-1} + \sum_{1 \leqslant l < \frac{1}{2}k} (-1)^{k+l-1} \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-2l)}{2^l l!}$$

$$(k = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Доказательство следует по индукции из рекурентной формулы

$$g_{k+1}(x) = -xg_k(x) + g_k'(x) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и очевидного равенства $g_1(x) = 1$.

Асимптотическое разложение. **Теорема 9.1.** *Пусть*

$$V_k(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{P_l(-G)}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}l}} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t+2\pi\lambda\sigma)}\, dV_k^{(j)}(x) =$$

$$= (-it-2\pi i\lambda\sigma)^j e^{-\frac{1}{2}(t+2\pi\lambda\sigma)^2} \sum_{l=0}^{k} \frac{P_l(it+2\pi i\lambda\sigma)}{\sigma^l} =$$

$$= (-it-2\pi i\lambda\sigma)^j e^{-\frac{1}{2}(t+2\pi\lambda\sigma)^2} Q_k(it+2\pi i\lambda\sigma)$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots;\ j=0,\ 1,\ \ldots). \qquad (9.35)$$

Отсюда

$$w_{\nu 0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dV_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}t^2} Q_\nu(it). \qquad (9.36)$$

Далее, интегрируя по частям и используя (9.26), имеем, что

$$w_{\nu k}(t) = -it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} W_{\nu k}(x)\, dx =$$

$$= (-1)^{-\frac{1}{2}k(k+1)} it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} E_k(\sigma^2+\sigma x)\, V_{\nu-k}^{(k)}(x)\, dx =$$

$$= (-1)^k it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda(\sigma^2+\sigma x)}}{(2\pi i\lambda)^k} V_{\nu-k}^{(k)}\, dx$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).$$

В силу известных свойств рядов Фурье мы можем изменить порядок суммирования и интегрирования. Согласно (9.35) найдем, что

$$w_{\nu k}(t) = (-1)^k it \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda\sigma^2}}{(2\pi i\lambda)^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t+2\pi\lambda\sigma)}\, V_{\nu-k}^{(k)}(x)\, dx =$$

$$= -t \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(t+2\pi\lambda\sigma)^{k-1}}{(2\pi\lambda)^k} e^{2\pi i\lambda\sigma^2-\frac{1}{2}(t+2\pi\lambda\sigma)^2} \times$$

$$\times Q_{\nu-k}(it+2\pi i\lambda\sigma) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu). \qquad (9.37)$$

где $P_l(-G)$ получается из $P_l(-z)$ путем замены всех степеней z^j $(j=0, 1, 2, \ldots)$ на $G^{(j)}(x)$. Тогда для всякого фиксированного целого положительного ν

$$\nu_n\left\{\omega(m)<\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}}{(\ln\ln n)^{\frac{k}{2}}}E_k\left(\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n}\right)V_{\nu-k}^{(k)}(x)+$$

$$+\frac{B\ln\ln\ln n}{(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}(\nu+1)}}$$

равномерно по $n>c_{72}$ *и* x.

Доказательство. Положим для сокращения

$$W_{\nu k}(x)=(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}E_k(\sigma^2+\sigma x)\,V_{\nu-k}^{(k)}(x)\quad (k=0, 1, \ldots, \nu),$$

$$F_{n\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{W_{\nu k}(x)}{\sigma^k},$$

$$w_{\nu k}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dW_{\nu k}(x),$$

$$\chi_{n\nu}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF_{n\nu}(x).$$

Подсчитаем сначала преобразование Фурье $\chi_{n\nu}(t)$ для функции $F_{n\nu}(x)$

$$\chi_{n\nu}(t)=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{w_{\nu k}(t)}{\sigma^k}.$$

Согласно лемме 9.7 имеем, что $G^{(k)}(\pm\infty)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$. Поэтому интегрированием по частям получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dG^{(k)}(x)=(-it)^k\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dG(x)=$$

$$=\frac{(-it)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{1}{2}x^2}\,dx=(-it)^k e^{-\frac{1}{2}t^2}\quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Положим теперь $\mu=\left[\frac{1}{2}\sigma^2\right]$ и оценим интеграл

$$I=\int\limits_{-(2\mu+1)\pi\sigma}^{(2\mu+1)\pi\sigma}\frac{1}{|t|}\left|\psi_n(t)-\chi_{n\nu}(t)\right|dt, \qquad (9.38)$$

где $\psi_n(t)$ — характеристическая функция закона распределения $\nu_n\left\{\omega(m)<\sigma^2+\sigma x\right\}$. Разобьем интеграл I на интегралы

$$I=\sum_{j=-\mu}^{\mu}I_j, \qquad (9.39)$$

где

$$I_j=\int\limits_{(2j-1)\pi\sigma}^{(2j+1)\pi\sigma}\frac{1}{|t|}\left|\psi_n(t)-\chi_{n\nu}(t)\right|dt=$$

$$=\int\limits_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma}\frac{1}{|2\pi j\sigma+t|}\left|\psi_n(2\pi j\sigma+t)-\chi_{n\nu}(2\pi j\sigma+t)\right|dt.$$

Имеем по определению $\psi_n(t)$:

$$\psi_n(2\pi j\sigma+t)=R_n\left(2\pi ij\sigma+\frac{it}{\sigma}\right)e^{-(2\pi j\sigma+t)i\sigma}.$$

Функция $R_n(z)$ имеет период $2\pi i$. Поэтому

$$\psi_n(2\pi j\sigma+t)=R_n\left(\frac{it}{\sigma}\right)e^{-(2\pi j\sigma+t)i\sigma}=\psi_n(t)\,e^{-2\pi ij\sigma^2}$$

и

$$I_j=\int\limits_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma}\frac{1}{|2\pi j\sigma+t|}\left|\psi_n(t)\,e^{-2\pi ij\sigma^2}-\chi_{n\nu}(2\pi j\sigma+t)\right|dt.$$

Этот интеграл опять разобьем на две части

$$I_j=I_j'+I_j'',$$

где I_j' означает часть интеграла I_j по области $|t|\leqslant\frac{\sigma}{8\nu}$, а I_j'' — по области $\frac{\sigma}{8\nu}<|t|\leqslant\pi\sigma$. Положим

$$J_j=\int\limits_{|t|\leqslant\frac{\sigma}{8\nu}}\frac{1}{|2\pi j\sigma+t|}\left|e^{-\frac{1}{2}t^2-2\pi ij\sigma^2}Q_\nu(it)-\chi_{n\nu}(2\pi j\sigma+t)\right|dt.$$

Согласно лемме 9.5

$$I_0' - J_0 = \frac{B}{\sigma^{\nu+1}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\nu} (c_{70} + t^2)^{\nu+1} e^{-\frac{1}{4}t^2} dt + \frac{B}{\ln n} = \frac{B}{\sigma^{\nu+1}} \qquad (9.40)$$

и при $i \neq 0$

$$I_j' - J_j = \frac{B}{|j|\,\sigma^{\nu+2}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\nu+1} (c_{70} + t^2)^{\nu+1} e^{-\frac{1}{4}t^2} dt +$$

$$+ \frac{B}{|j| \ln n} = \frac{B}{|j|\,\sigma^{\nu+2}}. \qquad (9.41)$$

Оценим теперь J_j. Так как степень полинома $P_k(z)$ равна $3k$, то при $|t| \leqslant \pi\sigma$ и $k = 1, 2, \ldots, \nu$ согласно (9.37)

$$w_{\nu k}(t) = B\,|t|\,\sigma^{2\nu-k-1} \sideset{}{'}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} |\lambda|^{3\nu-3k-1} e^{-\frac{1}{2}\left(2\pi|\lambda|-1\right)^2\sigma^2} =$$

$$= B\,|t|\,e^{-\sigma^2} = \frac{B\,|t|}{\ln n}$$

и при $j \neq 0$

$$w_{\nu k}(2\pi j\sigma + t) + \frac{(2\pi j\sigma + t)t^{k-1}}{(-2\pi j)^k} e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} Q_{\nu-k}(it) =$$

$$= B\,|2\pi j\sigma + t| \sideset{}{'}\sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ \lambda \neq -j}}^{\infty} \frac{|j+\lambda|^{k-1}\sigma^{k-1}}{|\lambda|^k} |\lambda + j|^{3(\nu-k)} \sigma^{2(\nu-k)} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left(2\pi|\lambda+j|-1\right)^2\sigma^2} = B\,|2\pi j\sigma + t|\,e^{-\sigma^2} = \frac{B\,|2\pi j\sigma + t|}{\ln n}.$$

Из этих оценок и (9.36) имеем, что при $|t| \leqslant \pi\sigma$

$$\chi_{n\nu}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} Q_\nu(it) + \frac{B\,|t|}{\ln n} \qquad (9.42)$$

и при $j \neq 0$

$$\chi_{n\nu}(2\pi j\sigma + t) = w_{\nu 0}(2\pi j\sigma + t) + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{w_{\nu k}(2\pi j\sigma + t)}{\sigma^k} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(2\pi j\sigma + t)^2} Q(2\pi j\sigma + t) - (2\pi j\sigma + t)\,e^{-2\pi i j\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\nu} \frac{t^{k-1} Q_{\nu-k}(it)}{(-2\pi j\sigma)^k} + \frac{B\,|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= Be^{-\sigma^2} - (2\pi j\sigma + t)e^{-2\pi ij\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{t^{k-1}}{(-2\pi j\sigma)^k} \sum_{l=0}^{\nu-k} \frac{P_l(it)}{\sigma^l} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= -(2\pi j\sigma + t)e^{-2\pi ij\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{P_l(it}{\sigma^l} \sum_{k=1}^{\nu-l} \frac{t^{k-1}}{(-2\pi j\sigma)^k} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= e^{-2\pi ij\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{P_l(it)}{\sigma^l} \left(1 - \left(\frac{t}{-2\pi j\sigma}\right)^{\nu-l}\right) + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} =$$

$$= e^{-2\pi ij\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} Q_{\nu-1}(it) + \frac{B|t|^{3\nu-2}}{\sigma^\nu |j|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n}. \qquad (9.43)$$

Возвращаемся к оценке J_j. Из (9.42) следует, что

$$J_0 = \frac{B}{\ln n}, \qquad (9.44)$$

а из (9.43) при $j \neq 0$, $|j| \leq \mu$

$$J_j = \int\limits_{|t| \leq \frac{\sigma}{8\nu}} \frac{1}{|2\pi j\sigma + t|} \left| \frac{P_\nu(it)}{\sigma^\nu} e^{-2\pi ij\sigma^2 - \frac{1}{2}t^2} + \frac{B|t|^{3\nu-2}}{\sigma^\nu |j|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{B|2\pi j\sigma + t|}{\ln n} \right| dt = B \int\limits_{|t| \leq \frac{\sigma}{8\nu}} \left\{ \left(t^2 + \frac{1}{|j|}\right) \frac{|t|^{3\nu-2}}{\sigma^{\nu+1}|j|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\ln n} \right\} dt = \frac{B}{\sigma^{\nu+1}|j|}. \qquad (9.45)$$

Остается оценить I_j''. Согласно лемме 9.6 и (9.42)

$$I_0'' = B \int\limits_{\frac{\sigma}{8\nu} < |t| \leq \pi\sigma} \left(\frac{1}{|t|} e^{-\frac{1}{12}t^2} + \frac{\sigma^{2\nu}}{|t|} e^{-\frac{1}{2}t^2} + \frac{1}{\ln n} \right) dt =$$

$$= B \exp\left(-\frac{\sigma^2}{12 \cdot 8^2 \nu^2}\right) + \frac{B\sigma}{\ln n} = \frac{B}{\sigma^{\nu+1}} \qquad (9.46)$$

и аналогично в силу (9.43) при $j \neq 0$, $|j| \leq \mu$

$$I_j'' = B \int\limits_{\frac{\sigma}{8\nu} < |t| \leq \pi\sigma} \left\{ \frac{1}{|2\pi j\sigma + t|} \left(e^{-\frac{1}{12}t^2} + \sigma^{2\nu-2} e^{-\frac{1}{2}t^2}\right) + \frac{1}{\ln n} \right\} dt =$$

$$= \frac{B}{|j|} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{12 \cdot 8^2 \cdot \nu^2}\right) + \frac{B\sigma}{\ln n} = \frac{B}{|j|\sigma^{\nu+1}}. \qquad (9.47)$$

Из (9.40), (9.41) и (9.44—9.47) имеем, что

$$I_j = \frac{B}{|j|\,\sigma^{\nu+1}},$$

следовательно, согласно (9.39)

$$I = \frac{B \ln \sigma}{\sigma^{\nu+1}}.$$

Применение леммы 9.4 заканчивает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что

$$\nu_n \left\{ \omega(m) < \ln \ln n + x \sqrt{\ln \ln n} \right\} = G(x) + \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi \ln \ln n}} \left\{ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} - b_1 + E_1\left(\ln \ln n + x\sqrt{\ln \ln n}\right) \right\} + \frac{B \ln \ln \ln n}{\ln \ln n},$$

$$\nu_n \left\{ \omega(m) < \ln \ln n + x \sqrt{\ln \ln n} \right\} = G(x) + \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi \ln \ln n}} \left\{ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} - b_1 + E_1\left(\ln \ln n + x\sqrt{\ln \ln n}\right) \right\} + \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi} \ln \ln n} \left\{ -\frac{1}{72}x^5 + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{6}b_1\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_1^2 - \frac{1}{2}b_2\right)x + \left(\frac{1}{6}x^3 + \left(b_1 - \frac{1}{2}\right)x\right) \times E_1\left(\ln \ln n + x\sqrt{\ln \ln n}\right) - xE_2\left(\ln \ln n + x\sqrt{\ln \ln n}\right) \right\} + \frac{B \ln \ln \ln n}{(\ln \ln n)^{3/2}}.$$

Большие уклонения. Обозначения. Сохраним введенные раньше обозначения $\varphi(z)$, $R_n(z)$, $F(z)$, $H_n(z)$, $\Phi_n(z)$, $E_k(u)$. Введем функции $P_k(u, z)$ $(k=0, 1, \ldots)$ посредством разложения

$$\exp\left\{ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{H_n^{(k)}(z)}{k!} \left(\frac{u}{\delta}\right)^k \right\} =$$

$$= \exp\left\{ H_n\left(z+\frac{u}{\hat\sigma}\right) - H_n(z) - \frac{u}{\hat\sigma} H'_n(z) - \frac{1}{2}u^2 \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{u^3}{6\hat\sigma} + \frac{u^4}{24\hat\sigma^8} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{u^k}{k!\,\hat\sigma^k}\left(F^{(k)}(z) - F''(z)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{u^2}{(k+1)(k+2)} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(u,\ z)}{\hat\sigma^k}, \tag{9.48}$$

где z — вещественное переменное,

$$\hat\sigma = \hat\sigma_n(z) = \sqrt{H''_n(z)} = \sqrt{e^z \ln\ln n + F''(z)}. \tag{9.49}$$

Заметим, что $P_k(u,\ z)$ является полиномом степени $3\,k$ относительно u,

$$P_k(u,\ z) = \sum_{l=k}^{3k} L_{kl}(z)\,u^l. \tag{9.50}$$

Первые $P_k(u,\ z)$ равны:

$P_0(u,\ z) = 1,$

$P_1(u,\ z) = \frac{1}{6}u^3,$

$P_2(u,\ z) = \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{72}u^6,$

$P_3(u,\ z) = \frac{1}{6}u^3\left(F^{(3)}(z) - F''(z)\right) + \frac{1}{120}u^5 + \frac{1}{144}u^7 + \frac{1}{1296}u^9,$

$P_4(u,\ z) = \frac{1}{24}u^4\left(F^{(4)}(z) - F''(z)\right) + \frac{17}{1440}u^6 +$

$\qquad + \frac{1}{36}u^9\left(F^{(3)}(z) - F''(z)\right) + \frac{1}{1728}u^{10} + \frac{1}{720}u^{11} + \frac{1}{31\,104}u^{12}.$

Обозначим:

$$Q_k(u,\ z) = \sum_{l=0}^{k} \frac{P_l(u,\ z)}{\hat\sigma^l} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{9.51}$$

$$X = X_n(z) = H'_n(z),$$

$$V_k(u,\ z) = Q_k(-G,\ z) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $Q_k(-G,\ z)$ получается из $Q_k(-u,\ z)$ путем замены всех степеней $u^j\,(j = 0,\ 1,\ \ldots)$ на $G^{(j)}(u)$.

Вспомогательные леммы. **Лемма 9.8.** *Пусть y и z — вещественные числа, $|y| \leqslant \pi\hat{\sigma}$, $|z| \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда*

$$\varkappa_n(y) = e^{-\Phi_n(z) - Xiy/\hat{\sigma}} R_n\left(z + \frac{iy}{\hat{\sigma}}\right) = Be^{-\frac{1}{12}y^2}$$

равномерно по $n < c_{73}$, y, z.

Доказательство. Из оценки (9.17) выводим, что

$$\varkappa_n(y) = \left\{ \varphi(e^{z+iy/\hat{\sigma}}) + \frac{B}{\ln n} \right\} \exp\left\{ (e^{z+iy/\hat{\sigma}} - 1) \ln\ln n - \right.$$
$$\left. - \Phi_n(z) - Xiy/\hat{\sigma} \right\}.$$

Функция φ для указанных в формулировке леммы y и z равна B. Поэтому согласно оценкам (9.21), (9.22)

$$\varkappa_n(y) = B \exp\left\{ \left(e^{iy/\hat{\sigma}} - 1 - \frac{iy}{\hat{\sigma}}\right) e^z \ln\ln n \right\}.$$

Применяя лемму 9.3 и (9.49), (9.21), находим, что

$$\varkappa_n(y) = B \exp\left\{ \left(-\frac{y^2}{2\hat{\sigma}^2} - \frac{iy^3}{6\hat{\sigma}^3} + \frac{\Theta y^4}{24\hat{\sigma}^4} \right) e^z \ln\ln n \right\} =$$
$$= B \exp\left\{ -\frac{y^2}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right)\left(1 + \frac{B}{\ln\ln n}\right) \right\} = B \exp\left(-\frac{1}{12} y^2 \right).$$

Лемма 9.9. *При $|y| \leqslant \frac{\hat{\sigma}}{8\nu}$, $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ в обозначениях леммы* 9.7

$$\varkappa_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2} Q_\nu(iy, z) + B\left(\frac{|y|}{\hat{\sigma}}\right)^{\nu+1} (c_{70} + y^2)^{\nu+1} e^{-\frac{1}{4}y^2} +$$
$$+ \frac{B|y|}{\hat{\sigma}\ln n}$$

равномерно по $n > c_{74}$, y, z.

Доказательство. Согласно (9.20) при $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, $|y| \leqslant \frac{1}{2}\sigma$

$$\Phi_n\left(z + \frac{iy}{\sigma}\right) - \Phi_n(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_n^{(k)}(z)}{k!} \left(\frac{iy}{\hat{\sigma}}\right)^k = \frac{B}{\ln n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\hat{\sigma}}\right)^k = \frac{B|y|}{\hat{\sigma}\ln n}.$$

Поэтому

$$\varkappa_n(y)=\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{H_n^{(k)}(z)}{k!}\left(\frac{iy}{\hat{\sigma}}\right)^k+\frac{B|y|}{\hat{\sigma}\ln n}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{H_n^{(k)}(z)}{k!}\left(\frac{iy}{\hat{\sigma}}\right)^k\right\}+\frac{B|y|}{\hat{\sigma}\ln n},$$

так как в силу леммы 9.8 $\varkappa_n(y)=B$.

Заметим, что

$$H_n^{(k)}(z)=e^z\ln\ln n+F^{(k)}(z)\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots),$$

в частности,

$$e^z\ln\ln n=\hat{\sigma}^2-F''(z).$$

Следовательно,

$$H_n^{(k)}(z)=\sigma^2+F^{(k)}(z)-F''(z)$$

и

$$\varkappa_n(y)=\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2-\frac{iy^3}{6\hat{\sigma}}-\frac{y^4}{24\hat{\sigma}^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{iy}{\hat{\sigma}}\right)^k\left(F^{(k)}(z)-F''(z)-\frac{y^2}{(k+1)(k+2)}\right)\right\}+\frac{B|y|}{\hat{\sigma}\ln n}.$$

Дальнейшее доказательство вполне аналогично доказательству леммы 9.5.

Лемма 9.10. *Пусть z — вещественное, $|z|\leqslant\frac{1}{2}$,*

$$K_n(u)=e^{-\Phi_n(z)}\int_{-\infty}^{u}e^{zw}\,d\nu_n\left\{\omega(m)<w\right\}.$$

Тогда

$$K_n(X+\hat{\sigma}u)=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}}{\hat{\sigma}^k}E_k(X+\hat{\sigma}u)\frac{\partial^k}{\partial u^k}V_{\nu-k}(u,\ z)+$$

$$+\frac{B\ln\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}^{\nu+1}},$$

где оценка равномерна для $n>c_{75}$, u, z.

Доказательство. Для оценки $K_n(X+\hat{\sigma}u)$ подсчитаем преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy}\,dK_n(X+\hat{\sigma}u)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{u-X}{\hat{\sigma}}iy\right)dK_n(u)=$$

$$=e^{-\Phi_n(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{u-X}{\hat{\sigma}}iy+uz\right)d\nu_n\left\{\omega(m)<u\right\}=$$

$$=e^{-\Phi_n(z)-Xiy/\hat{\sigma}}R_n\left(z+\frac{iy}{\hat{\sigma}}\right)=\varkappa_n(y).$$

Используя леммы 9.8, 9.9 и следуя доказательству теоремы 9.1, получим требуемую оценку.

Лемма 9.11. *Ряд Фурье*

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda x}}{(z-2\pi i\lambda)^k(2\pi i\lambda)^l},$$

где $k, l=0, 1, \ldots;\ k+l\geqslant 1$ и штрих означает, что при суммировании значение $\lambda=0$ опускается, представляет периодическую функцию $E_{kl}^*(x)=E_{kl}^*(x, z)$ с периодом 1, которая при $0<x<1$ имеет вид

$$E_{kl}^*(x)=T_k(x)\,e^{xz}+U_l(x),$$

$T_k(x)=T_k(x, z)$ и $U_l(x)=U_l(x, z)$ — полиномы степеней $k-1$ и l соответственно. Их коэффициенты при $z\neq 0$ можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} T_k^{(m)}(1)\,e^z-T_k^{(m)}(0)=(-1)^m\dbinom{k+l-m}{k-m-1}z^{-k-l+m+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m=0, \ldots, k-1), \\ U_l^{(n)}(1)-U_l^{(n)}(0)=-\dbinom{k+l-n}{l-n-1}z^{-k-l+n+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=0, \ldots, l-1), \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{T_k^{(m)}(1)\,e^z-T_k^{(m)}(0)}{z^{m+1}}+\sum_{n=0}^{l}\frac{U_l^{(n)}(0)}{(n+1)!}=0. \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $z \neq 0$. Легко доказывается тождество ($\lambda \neq 0$)

$$(z-2\pi i\lambda)^{-k}(2\pi i\lambda)^{-l} = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k+l-m-2}{k-m-1} (z-2\pi i\lambda)^{-m-1} \times$$

$$\times z^{-k-l+m+1} + \sum_{n=0}^{l-1} \binom{k+l-n-2}{l-n-1} (z-2\pi i\lambda)^{-n-1} z^{-k-l+n+1}.$$

Пусть периодическая функция $E(x)$ с периодом 1 при $0<x<1$ имеет вид

$$E(x) = T_k(x) e^{xz} + U_l(x),$$

где $T_k(x)$ и $U_l(x)$ — полиномы степеней $k-1$ и l соответственно. Подсчитаем коэффициенты Фурье этой функции. При целом $\lambda \neq 0$, как легко убедиться интегрированием по частям,

$$\int_0^1 E(x) e^{-2\pi i\lambda x} dx = \int_0^1 T_k(x) e^{(z-2\pi i\lambda)x} dx + \int_0^1 U_l(x) e^{-2\pi i\lambda x} dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{T_k^{(m)}(1) e^z - T_k^{(m)}(0)}{(z-2\pi i\lambda)^{m+1}} - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{U_l^{(n)}(1) - U_l^{(n)}(0)}{(2\pi i\lambda)^{n+1}},$$

а при $\lambda = 0$

$$\int_0^1 E(x) dx = \int_0^1 T_k(x) e^{xz} dx + \int_0^1 U_l(x) dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m \frac{T_k^{(m)}(1) e^z - T_k^{(m)}(0)}{z^{m+1}} + \sum_{n=0}^{l} \frac{U_l^{(n)}(0)}{(n+1)!}.$$

Функция $E(x)$ имеет своим рядом Фурье

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda x}}{(z-2\pi i\lambda)^k (2\pi i\lambda)^l},$$

если

$$(-1)^m \left\{ T_k^{(m)}(1) e^z - T_k^{(m)}(0) \right\} = \binom{k+l-m-2}{k-m-1} z^{-k-l+m+1}$$

$$(m=0, \ldots, k-1),$$

$$-U_l^{(n)}(1)+U_l^{(n)}(0)=\binom{k+l-n-2}{l-n-1}z^{-k-l+n+1}$$

$$(n=0,\ \ldots,\ l-1),$$

$$\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{T_k^{(m)}(1)\,e^z-T_k^{(m)}(0)}{z^{m+1}}+\sum_{n=0}^{l}\frac{U_l^{(n)}(0)}{(n+1)!}=0.$$

Из первых уравнений можно найти последовательно коэффициенты $T_k(x)$ при x^{k-1}, x^{k-2}, $\ldots$, x, x^0, из следующих – коэффициенты $U_l(x)$ при x^l, x^{l-1}, $\ldots$, x, а затем из последнего уравнения – свободный член $U_l(x)$.

Лемма 9.12. *При* $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ x<0$

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-\frac{1}{x}+\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{l-1}(2l-1)!!}{x^{2l+1}}+\Theta\frac{(2k+1)!!}{|x|^{2k+3}}\right),$$

а при $x>0$

$$1-G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{1}{x}+\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^l(2l-1)!!}{x^{2l+1}}+\Theta\frac{(2k+1)!!}{x^{2k+3}}\right),$$

где $|\Theta|<1$.

Доказательство. Положим для краткости

$$G_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{1}{x}+\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^l(2l-1)!!}{x^{2l+1}}\right)\quad(k=0,\ 1,2,\ \ldots).$$

Пусть $x>0$. Интегрированием по частям имеем, что

$$\int_x^\infty u^{-l}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du=x^{-l-1}e^{-\frac{1}{2}x^2}-(l+1)\int_x^\infty u^{-l-2}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du.$$

Повторное применение этой формулы дает

$$G(x)=G_k(x)+\frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty u^{-2k-2}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du.$$

Таким образом, при k четном

$$G(x)<G_k(x),$$

а при k нечетном

$$G(x)>G_k(x).$$

Отсюда для любого целого $k \geqslant 0$

$$\left| G(x) - G_k(x) \right| < \left| G_{k+1}(x) - G_k(x) \right| = \frac{(2k+1)!!}{x^{2k+3}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Лемма доказана для $x>0$. Так как для любых x

$$G(x) = 1 - G(x),$$

то из доказанного следует справедливость леммы и при $x<0$.

Лемма 9.13. $G(0)=\frac{1}{2}$, $G'(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$$G^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad k=2,\ 4,\ 6,\ \ldots, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}}{(k-2)!!\sqrt{2\pi}}, & \textit{если} \quad k=3,\ 5,\ 7,\ \ldots \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение леммы получаем из леммы 9.12 или непосредственно, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях двух разложений

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$$

и

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left(e^{-\frac{1}{2}u^2} \right)^{(k)}_{u=0} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} G^{(k+1)}(0).$$

Теоремы о больших уклонениях. **Теорема 9.2.** *Пусть* $|x| < \varepsilon \sqrt{\ln \ln n}$, *где* ε *— достаточно малое фиксированное положительное число,* ν *— любое фиксированное целое положительное число. Тогда* $\nu_n \{ \omega(m) < X \}$ *при* $x<0$ *и* $\nu_n \{ \omega(m) > X \}$ *при* $x>0$ *равно*

$$e^{H_n(z) - zH_n'(z)} \left\{ Q_\nu(-W,\ z) + \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-k} \frac{P(-W_{\nu k l},\ z)}{\delta^{k+l}} + B \frac{\ln \hat{\delta}}{\hat{\delta}^{\nu+l}} \right\}$$

равномерно по x, $n > c_{76}$. *Здесь* z *является единственным решением уравнения*

$$X = H_n'(0) + x\sqrt{H_n''(0)} = H_n'(z), \tag{9.52}$$

$Q_\nu(-W, z)$ получается из $Q_\nu(-u, z)$ заменой u^j ($j=0, 1, \ldots$) на

$$W^{(j)}=-\sum_{\mu=0}^{-1}(z\hat\sigma)^\mu G^{(j-\mu)}(0)\operatorname{sgn}x+(z\hat\sigma)^j e^{\frac{1}{2}z^2\hat\sigma^2}G\left(-|z|\hat\sigma\right),$$

а $P_l(-W_{\nu kl}, z)$ — из $P_l(-u, z)$ заменой u^j($j=0, 1, \ldots$) на

$$W_{\nu kl}^{(j)}=(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}E_k(X+0\operatorname{sgn}x)\,G^{(j-k)}(0)+$$

$$+(-1)^{k+1}z\sum_{\mu=0}^{\nu-k-l}\frac{G^{(j+k+\mu)}(0)}{\hat\sigma^\mu}E^*_{\mu+1,\,k}(X, z)\operatorname{sgn}x.$$

Величины $H_n(z)$, $\hat\sigma$, $P_l(u, z)$, $Q_\nu(u, z)$, $E_k(x)$ определены формулами (9.19), (9.49), (9.50), (9.51), (9.26), *а $E^*_{\mu+1,\,k}(x, z)$ — леммой* 9.11.

Доказательство. По формуле обращения в обозначениях леммы 9.10 имеем, что

$$\nu_n\left\{\omega(m)<w\right\}=e^{\Phi_n(z)}\int_{(-\infty,\,w)}e^{-uz}\,dK_n(u).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-uz}\,dK_n(u)=e^{-\Phi_n(z)},$$

то

$$\nu_n\left\{\omega(m)>w\right\}=1-\nu_n\left\{\omega(m)\leqslant w\right\}=$$

$$=e^{\Phi_n(z)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-uz}\,dK_n(u)-e^{\Phi_n(z)}\int_{(-\infty,\,w]}e^{-uz}\,dK_n(u)=$$

$$=e^{\Phi_n(z)}\int_{(w,\,\infty)}e^{-uz}\,dK_n(u).$$

Из этих формул следует, что

$$\nu_n\left\{\omega(m)<X\right\}=e^{\Phi_n(z)-Xz}\int_{(-\infty,\,0)}e^{-uz\hat\sigma}\,dK_n(X+u\hat\sigma),\tag{9.53}$$

$$\nu_n\left\{\omega(m)>X\right\}=e^{\Phi_n(z)-Xz}\int_{(0,\,\infty)}e^{-uz\hat\sigma}\,dK_n(X+u\hat\sigma).\tag{9.54}$$

Подставим сюда асимптотическое выражение для $K_n(X+u\hat{\sigma})$, найденное в лемме 9.10,

$$K_n(X+u\hat{\sigma})=\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{l=0}^{\nu-k}\sum_{j=}^{3l}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)+j}}{\hat{\sigma}^{k+l}}E_k(X+\sigma u)\times$$

$$\times L_{l_j}(z)\,G^{(j+k)}(u)+\rho_{n\nu}(u), \tag{9.55}$$

где

$$\rho_{n\nu}(u)=\frac{B\ln\sigma}{\hat{\sigma}^{\nu+1}}.$$

Для этого подсчитаем некоторые интегралы. Интегрируя по частям и учитывая, что $G^{(k)}(u)\,e^{-uz\hat{\sigma}}\to 0$ при $u\to-\infty$, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-uz\hat{\sigma}}\,dG^{(k)}(u)=\sum_{l=0}^{k-1}(z\hat{\sigma})^l G^{(k-l)}(0)+\frac{(z\hat{\sigma})^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-uz\hat{\sigma}-\frac{1}{2}u^2}\,du=$$

$$=\sum_{l=0}^{k-1}(z\hat{\sigma})^l G^{(k-l)}(0)+(z\hat{\sigma})^k e^{\frac{1}{2}z^2\hat{\sigma}^2}G(z\hat{\sigma})\quad(k=0,1,\ldots). \tag{9.56}$$

Имеем, далее, при $k\geqslant 1$, $\mu\geqslant 0$

$$\int_{(-\infty,0)}e^{-uz\hat{\sigma}}\,dE_k(X+u\sigma)\,G^{(\mu)}(u)=E_k(X-0)\,G^{(\mu)}(0)+$$

$$+z\hat{\sigma}\int_{(-\infty,0)}e^{-uz\hat{\sigma}}E_k(X+u\hat{\sigma})\,G^{(\mu)}(u)\,du=$$

$$=E_k(X-0)\,G^{(\mu)}(0)+$$

$$+(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}z\hat{\sigma}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i\lambda x}}{(2\pi i\lambda)^k}\int_{-\infty}^{0}e^{-(z-2\pi i\lambda)u\hat{\sigma}}G^{(\mu)}(u)\,du.$$

Интегрирование по частям дает:

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-(z-2\pi i\lambda)u\hat{\sigma}}G^{(\mu)}(u)\,du=-\sum_{l=1}^{j+1}\frac{G^{(\mu+l-1)}(0)}{(z-2\pi i\lambda)^l\hat{\sigma}^l}+$$

$$+\frac{1}{(z-2\pi i\lambda)^{j+1}\hat{\sigma}^{j+1}}\int_{-\infty}^{0}e^{-(z-2\pi i\lambda)u\hat{\sigma}}G^{(\mu+j+1)}(u)\,du.$$

При $z<0$ последний интеграл по абсолютному значению не превосходит

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-uz\hat{\sigma}}\, G^{(\mu+j+1)}(u)\, du \leqslant \int_{-\infty}^{0} G^{(\mu+j+1)}(u)\, du = G^{(\mu+j)}(0).$$

Следовательно, при $z<0$, $k\geqslant 1$, $j\geqslant 1$ согласно лемме 9.11

$$\int_{(-\infty,\,0)} e^{-uz\hat{\sigma}}\, dE_k(X+u\hat{\sigma})\, G^{(\mu)}(u) = E_k(X-0)\, G^{(\mu)}(0) -$$

$$-(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} z\sigma \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda x}}{(2\pi i\lambda)^k} \left\{ \sum_{l=1}^{j} \frac{G^{(\mu+l-1)}(0)}{(z-2\pi i\lambda)^l \hat{\sigma}^l} + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{|z-2\pi i\lambda|^{j+1} \hat{\sigma}^{j+1}} \right\} = E_k(X-0)\, G^{(\mu)}(0) -$$

$$-(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} z \sum_{l=1}^{j} \frac{G^{(\mu+l-1)}(0)}{\hat{\sigma}^{l-1}} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi i\lambda x}}{(2\pi i\lambda)^k (z-2\pi i\lambda)^l} +$$

$$+ \frac{B\,|z|}{\hat{\sigma}^j} = E_k(X-0)\, G^{(\mu)}(0) -$$

$$-(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} z \sum_{l=1}^{j} \frac{G^{(\mu+l-1)}(0)}{\hat{\sigma}^{l-1}} E^*_{lk}(X,\ z) + \frac{B\,|z|}{\hat{\sigma}^j}. \qquad (9.57)$$

Наконец, так как $\rho_{n\nu}(-\infty)=0$, при $z<0$ имеем:

$$\int_{(-\infty,\,0)} e^{-uz\hat{\sigma}}\, d\rho_{n\nu}(u) = \rho_{n\nu}(0) - \int_{-\infty}^{0} \rho_{n\nu}(u)\, de^{-uz\hat{\sigma}} = \frac{B \ln \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}^{\nu+1}}. \qquad (9.58)$$

Из (9.53), (9.55)–(9.58) получаем оценку при $z<0$

$$\nu_n \left\{ \omega(m) < X \right\} = e^{\Phi_n(z) - zX} \left\{ \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{j=l}^{3l} \frac{(-1)^j L_{lj}(z)}{\hat{\sigma}^l} \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{\mu=0}^{j-1} (z\hat{\sigma})^\mu G^{(j-\mu)}(0) + (z\hat{\sigma})^j e^{\frac{1}{2}z^2\hat{\sigma}^2} G(z\hat{\sigma}) \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-k} \sum_{j=l}^{3l} \frac{(-1)^j L_{lj}(z)}{\hat{\sigma}^{k+l}} \left((-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)} \times \right.$$

$$\times E_k(X-0)\, G^{(j+k)}(0)+$$

$$+(-1)^k z \sum_{\mu=0}^{\nu-k-l} \frac{G^{(j+k+\rho)}(0)}{\hat{\sigma}^{\mu}} E^*_{\mu+1,\,k}(X,\ z)\Bigg)+B\,\frac{\ln\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}^{\nu+1}}\Bigg\}.$$

Аналогично из (9.54) и (9.55) заключаем, что при $z>0$

$$\nu_n\Big\{\omega(m)>X\Big\}=e^{\Phi_n(z)-zX}\Bigg\{\sum_{l=0}^{\nu}\sum_{j=}^{3l}\frac{(-1)^j L_{lj}(z)}{\hat{\sigma}^l}\times$$

$$\times\Bigg(-\sum_{\mu=0}^{j-1}(z\hat{\sigma})^{\mu}G^{(j-\mu)}(0)+(z\hat{\sigma})^j e^{\frac{1}{2}z^2\hat{\sigma}^2}\Big(1-G(z\hat{\sigma})\Big)\Bigg)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{l=0}^{\nu-k}\sum_{j=l}^{3l}\frac{(-1)^j L_{lj}(z)}{\hat{\sigma}^{k+l}}\Bigg(-(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}\times$$

$$\times E_k(X+0)\, G^{(j+k)}(0)+$$

$$+(-1)^{k-1} z \sum_{\mu=0}^{\nu-k-l}\frac{G^{(j+k+\mu)}(0)}{\hat{\sigma}^{\mu}} E^*_{\mu+1,\,k}(X,\ z)\Bigg)+B\,\frac{\ln\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}^{\nu+1}}\Bigg\}.$$

Покажем, что переменную z можно подобрать так, чтобы $X=H'_n(z)$, т. е.

$$H'_n(z)=H'_n(0)+x\sqrt{H''_n(0)}\,. \tag{9.59}$$

Имеем:

$$\frac{H'_n(z)-H'_n(0)}{H''_n(0)}=\sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k,$$

где $d_1=1$ и согласно (9.19), (9.21)

$$d_k=\frac{B}{\ln\ln n} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Уравнение (9.59) принимает вид

$$\frac{x}{\sqrt{H''_n(0)}}=z+\sum_{k=2}^{\infty} d_k z^k.$$

Из известных теорем об обращении рядов следует разрешимость и единственность уравнения (9.59) при $|x|<\varepsilon\sqrt{\ln\ln n}$, причем знаки z и x совпадают.

Теорема доказана.

Теорема 9.2 трудно обозрима. Поэтому мы приведем несколько следствий из нее, формулируемых проще.

Теорема 9.3. *В обозначениях теоремы* 9.2 *имеем, что* $\nu_n\{\omega(m)<X\}$ *при* $x<0$ *и* $\nu_n\{\omega(m)>X\}$ *при* $x>0$ *равно*

$$e^{M_n(x)}\left\{e^{\frac{1}{2}\zeta^2} G\left(-|\zeta|\right)+\frac{\Psi_1(x)+\Psi_2(x)}{\sqrt{2\pi(1+\xi)\ln\ln n}}+B\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right\} \quad (9.60)$$

равномерно по $n>c_{77}$, $|x|<\varepsilon\sqrt{\ln\ln n}$. *Здесь*

$$\xi=\frac{x}{\sqrt{\ln\ln n}}, \quad \beta=\{X\} - \textit{дробная часть } X,$$

$$\zeta=\sqrt{(1+\xi)\ln\ln n}\ \ln(1+\xi),$$

$$M_n(x)=\left\{\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\right\}\ln\ln n-$$

$$-\left(b_1+\frac{1}{2}b_2\xi\right)\left(\xi+\ln(1+\xi)\right)+$$

$$+F\left(\ln(1+\xi)\right)+\xi F'\left(\ln(1+\xi)\right),$$

$$\Psi_1(x)=\frac{1}{6}\left\{(1-x^2)\operatorname{sgn} x+\sqrt{2\pi}\,x^3 e^{\frac{1}{2}x^2} G\left(-|x|\right)\right\},$$

$$\Psi_2(x)=E(X)+\left\{\frac{1}{\xi}(1+\xi)^{\beta}-\frac{1}{\ln(1+\xi)}\right\}\operatorname{sgn} x,$$

$$E(X)=\begin{cases}-1, & \textit{если } X - \textit{целое число}, \quad x<0,\\ 0, & \textit{если } X - \textit{целое число}, \quad x>0,\\ 0, & \textit{если } X - \textit{нецелое число}.\end{cases}$$

Доказательство. Из теоремы 9.2 при $\nu=1$ имеем, что $\nu_n\{\omega(m)<X\}$ при $x<0$ и $\nu_n\{\omega(m)>X\}$ при $x>0$ равно

$$G_n(x)=e^{H_n(z)-zH_n'(z)}\left\{P_0(-W, z)+\frac{1}{\hat\sigma}P_1(-W, z)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\hat\sigma}P_0(-W_{110}, z)+B\frac{\ln\hat\sigma}{\hat\sigma^2}\right\}.$$

Так как согласно леммам 9.10 и 9.11

$$P_0(u, z)=1, \quad P_1(u, z)=\frac{1}{6}u^3,$$

$$W^{(0)}=e^{\frac{1}{2}z^2\hat\sigma^2} G\left(-|z|\hat\sigma\right),$$

$$W^{(3)} = -\left\{ G'''(0) + z\hat{\sigma}\, G''(0) + (z\hat{\sigma})^2 G'(0) \right\} \operatorname{sgn} x +$$

$$+ (z\hat{\sigma})^3 e^{\frac{1}{2} z^2 \hat{\sigma}^2} G\left(-|z|\hat{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1-(z\hat{\sigma})^2}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn} x + (z\hat{\sigma})^3 e^{\frac{1}{2} z^2 \hat{\sigma}^2} G\left(-|z|\hat{\sigma}\right),$$

$$W_{110}^{(0)} = \left\{ \left(-E(X) - \frac{1}{2} + \beta\right) G'(0) + zG'(0)\, E_{11}^{*}(X, z) \right\} \operatorname{sgn} x =$$

$$= \left\{ -E(X) - \frac{1}{2} + \beta + zE_{11}^{*}(X, z) \right\} \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2\pi}},$$

$$E_{11}^{*}(X, z) = \frac{e^{\beta z}}{z(e^z - 1)} + \frac{1-2\beta}{2z} - \frac{1}{z^2},$$

то

$$G_n(x) = e^{H_n(z) - zH_n'(z)} \left\{ e^{\frac{1}{2} z^2 \hat{\sigma}^2} G\left(-|z|\hat{\sigma}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Psi_1(z\hat{\sigma}) + Y_n(x)}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} + B \frac{\ln \hat{\sigma}}{\hat{\sigma}^2} \right\}, \tag{9.61}$$

где

$$Y_n(x) = E(X) + \left\{ -\frac{1}{2} + \beta + zE_{11}^{*}(X, z) \right\} \operatorname{sgn} x =$$

$$= E(X) + \left(\frac{e^{\beta z}}{e^z - 1} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sgn} x.$$

Уравнение (9.52) можно переписать в виде

$$e^z \ln\ln n + F'(z) = \ln\ln n + b_1 + x\sqrt{\ln\ln n + b_2},$$

или

$$(e^z - 1)\ln\ln n = b_1 - F'(z) + \xi \sqrt{1 + \frac{b_2}{\ln\ln n}} \ln\ln n.$$

Отсюда

$$(e^z - 1)\ln\ln n = b_1 - F'(z) + \xi \ln\ln n + \frac{1}{2} b_2 \xi + \frac{B}{\ln\ln n}. \tag{9.62}$$

Согласно (9.21)

$$e^z = 1 + \xi + \frac{B}{\ln\ln n}, \tag{9.63}$$

откуда

$$z = \ln(1+\xi) + \frac{B}{\ln\ln n}. \tag{9.64}$$

Подставляя это выражение в правую часть (9.62) и используя (9.21) и теорему о конечном приращении, получаем, что

$$e^z \ln\ln n = (1+\xi)\ln\ln n + b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi - F'\Big(\ln(1+\xi)\Big) + \\ + \frac{B}{\ln\ln n}; \tag{9.65}$$

отсюда

$$z = \ln(1+\xi) + \frac{b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi - F'\Big(\ln(1+\xi)\Big)}{\ln\ln n} + \frac{B}{(\ln\ln n)^2}. \tag{9.66}$$

Так как согласно (9.21)

$$F'\Big(\ln(1+\xi)\Big) = F'(0) + B\left|\ln(1+\xi)\right| = b_1 + B|\xi|,$$

то

$$z = \ln(1+\xi) + \frac{B}{\ln\ln n}\left(|\xi| + \frac{1}{\ln\ln n}\right). \tag{9.67}$$

Дадим асимптотические выражения для величин $H_n(z)$, $H_n'(z)$, $H_n''(z)$ и $\hat{\sigma}$. Согласно (9.65), (9.64) и (9.21) по формуле конечных приращений

$$H_n(z) = (e^z - 1)\ln\ln n + F(z) = \xi \ln\ln n + b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi + \\ + F\Big(\ln(1+\xi)\Big) - F'\Big(\ln(1+\xi)\Big) + \frac{B}{\ln\ln n}. \tag{9.68}$$

Аналогично согласно (9.62)

$$H_n'(z) = e^z \ln\ln n + F'(z) = (1+\xi)\ln\ln n + b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi + \\ + \frac{B}{\ln\ln n}. \tag{9.69}$$

Из (9.63) и (9.21)

$$\hat{\sigma}^2 = H_n''(z) = (1+\xi)\ln\ln n + B.$$

Отсюда

$$\hat{\sigma} = \sqrt{(1+\xi)\ln\ln n} + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}, \tag{9.70}$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)\ln\ln n}} + \frac{B}{(\ln\ln n)^{3/2}}. \tag{9.71}$$

С помощью этих формул дадим соответствующие асимптотические выражения для величин, стоящих в правой части формулы (9.61). Из (9.68), (9.69), (9.66) и (9.21) следует, что

$$H_n(z) - z H_n'(z) = \xi \ln\ln n + b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi + F\Big(\ln(1+\xi)\Big) -$$

$$- F'\Big(\ln(1+\xi)\Big) - \left\{ \ln(1+\xi) + \frac{b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi - F'\Big(\ln(1+\xi)\Big)}{\ln\ln n} \right\} \times$$

$$\times \left\{ (1+\xi)\ln\ln n + b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi \right\} + \frac{B}{\ln\ln n} =$$

$$= \left\{ \xi - (1+\xi)\ln(1+\xi) \right\} \ln\ln n - \left(b_1 + \frac{1}{2} b_2 \xi\right) \times$$

$$\times \Big(\xi + \ln(1+\xi)\Big) + F\Big(\ln(1+\xi)\Big) + \xi F'\Big(\ln(1+\xi)\Big) + \frac{B}{\ln\ln n} =$$

$$= M_n(x) + \frac{B}{\ln\ln n}. \qquad (9.72)$$

Далее, оценки (9.67) и (9.70) показывают, что

$$z\hat{\sigma} = \sqrt{(1+\xi)\ln\ln n}\,\ \ln(1+\xi) + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}} \left(|\xi| + \frac{1}{\ln\ln n} \right) =$$

$$= \zeta + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}} \left(|\xi| + \frac{1}{\ln\ln n} \right). \qquad (9.73)$$

Согласно лемме 9.12

$$\left(e^{\frac{1}{2}u^2} G(u) \right)' = u e^{\frac{1}{2}u^2} G(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = B \min\left(1, \frac{1}{|u|}\right),$$

следовательно,

$$e^{\frac{1}{2}z^2\hat{\sigma}^2} G(-|z|\hat{\sigma}) = e^{\frac{1}{2}\zeta^2} G(-|\zeta|) +$$

$$+ \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}} \left(|\xi| + \frac{1}{\ln\ln n} \right) \min\left(1, \frac{1}{|\xi|\sqrt{\ln\ln n}}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\zeta^2} G(-|\zeta|) + \frac{B}{\ln\ln n}. \qquad (9.74)$$

Кроме того, согласно лемме 9.12

$$e^{\frac{1}{2}\zeta^2} G(-|\zeta|) = B. \qquad (9.75)$$

Опять согласно лемме 9.12 при $u<0$

$$\Psi_1'(u)=\frac{1}{3}u+\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{6}\sqrt{2\pi}\,u^2(3+u^2)\,e^{\frac{1}{2}u^2}G(u)=$$
$$=B\min(1,\ |u|^{-3})$$

и согласно (9.73)

$$z\hat{\sigma}=\sqrt{(1+\xi)\ln\ln n}\ \ln(1+\xi)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(|\xi|+\frac{1}{\ln\ln n}\right)=$$
$$=\xi\sqrt{\ln\ln n}\,(1+B|\xi|)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(|\xi|+\frac{1}{\ln\ln n}\right)=$$
$$=x+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(|x|+\frac{1}{\ln\ln n}\right)^2.$$

Следовательно, при $x<0$

$$\Psi_1(z\hat{\sigma})=\Psi_1(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(|x|+\frac{1}{\ln\ln n}\right)^2\min(1,\ |x|^{-3})=$$
$$=\Psi_1(x)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}. \tag{9.76}$$

Это соотношение справедливо и при $x>0$. Кроме того, согласно лемме 9.12

$$\Psi_1(x)=B. \tag{9.77}$$

Поэтому согласно (9.71)

$$\frac{\Psi_1(z\hat{\sigma})}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}}=\frac{\Psi_1(x)}{\sqrt{2\pi(1+\xi)\ln\ln n}}+\frac{B}{\ln\ln n}. \tag{9.78}$$

Займемся теперь функцией $Y_n(x)$. Имеем:

$$\frac{e^{\beta z}}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1+\beta z+Bz^2}{z+\frac{1}{2}z^2+B|z|^3}-\frac{1}{z}=$$
$$=\frac{1}{z}(1+\beta z+Bz^2)\left(1-\frac{1}{2}z+Bz^2\right)-\frac{1}{z}=\beta-\frac{1}{2}+B|z|.$$

Следовательно,

$$Y_n(x)=E(X)+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sgn}x+B|\xi|.$$

С другой стороны,

$$\Psi_2(x)=E(X)+\left\{\frac{1}{\xi}(1+\beta\xi+B\xi^2)-\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{1}{2}\xi+B\xi^2\right)\right\}\operatorname{sgn}x=$$
$$=E(X)+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sgn}x+B|\xi|. \tag{9.79}$$

Отсюда при $|\xi|\leqslant(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$ согласно (9.71)

$$\frac{Y_n(x)}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}}-\frac{\Psi_2(x)}{\sqrt{2\pi(1+\xi)\ln\ln n}}=\frac{B}{\ln\ln n}. \tag{9.80}$$

При $|\xi|>(\ln\ln n)^{-\frac{1}{2}}$ из (9.67) следует, что

$$\frac{e^{\beta z}}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{\exp\left\{\beta\ln(1+\xi)+\frac{B|\xi|}{\ln\ln n}\right\}}{\exp\left\{\ln(1+\xi)+\frac{B|\xi|}{\ln\ln n}\right\}-1}-\frac{1}{\ln(1+\xi)+\frac{B|\xi|}{\ln\ln n}}=$$
$$=\frac{(1+\xi)^\beta\left(1+\frac{B|\xi|}{\ln\ln n}\right)}{(1+\xi)\left(1+\frac{B|\xi|}{\ln\ln n}\right)-1}-\frac{1+\frac{B}{\ln\ln n}}{\ln(1+\xi)}=$$
$$=\frac{1}{\xi}(1+\xi)^\beta\left(1+\frac{B|\xi|}{\ln\ln n}\right)-\frac{1}{\ln(1+\xi)}+\frac{B}{|\xi|\ln\ln n}=$$
$$=\frac{1}{\xi}(1+\xi)^\beta-\frac{1}{\ln(1+\xi)}+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

В этом случае согласно (9.71)

$$\frac{Y_n(x)}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\xi)\ln\ln n}}\left\{E(X)+\left(\frac{1}{\xi}(1+\xi)^\beta-\frac{1}{\ln(1+\xi)}\right)\operatorname{sgn}x\right\}+$$
$$+\frac{B}{\ln\ln n}=\frac{\Psi_2(x)}{\sqrt{2\pi(1+\xi)\ln\ln n}}+\frac{B}{\ln\ln n}.$$

Таким образом, формула (9.80) справедлива для всех рассматриваемых ξ.

Подставляя теперь (9.72), (9.74), (7.78) и (9.80) в (9.61) и учитывая (9.74), (9.76) и (9.78), получаем теорему.

Теорема 9.4. *Пусть ν — фиксированное целое положительное число. В обозначениях теоремы* 9.3 *имеем, что*

$$\nu_n\{\omega(m)<X\}\quad \textit{при}\quad x<0\quad \textit{и}\quad \nu_n\{\omega(m)>X\}\ \textit{при}\quad x>0$$

равно

$$e^{\{\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\}\ln\ln n}\left\{e^{\frac{1}{2}x^2}G(-|x|)+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi\ln\ln n}}\left[A_0(x)+A_1(x)\xi+\ldots+A_\nu(x)\xi^\nu\right]+$$

$$\left.+B\left(\frac{|\xi|^{\nu+1}}{\sqrt{\ln\ln n}}+\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right)\right\}$$

равномерно по $n>c_{78}$, $|x|<\varepsilon\sqrt{\ln\ln n}$. *Здесь*

$$A_0(x)=E(X)+\frac{1}{6}\sqrt{2\pi}\,x^3e^{\frac{1}{2}x^2}G(-|x|)+$$

$$+\left\{\frac{1}{6}(1-x^2)-\frac{1}{2}+\beta\right\}\operatorname{sgn}x,$$

$$A_1(x)=-\frac{1}{24}+\frac{1}{2}E(X)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}b_2-\beta+\frac{1}{2}\beta^2\right)\operatorname{sgn}x,$$

$$A_2(x)=\frac{1}{24}+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}b_2\right)E(X)+\left\{-\frac{13}{48}-\frac{3}{8}b_2+\frac{2}{3}b_3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{23}{24}+\frac{1}{2}b_2\right)\beta-\frac{3}{4}\beta^2+\frac{1}{6}\beta^3\right\}\operatorname{sgn}x,$$

$$A_3(x)=-\frac{71}{1920}-\left(\frac{5}{16}+\frac{3}{8}b_2-\frac{2}{3}b_3\right)E(X)+\left\{\frac{29}{48}+\right.$$

$$+\frac{43}{48}b_2+\frac{1}{8}b_2^2-\frac{23}{24}b_3+\frac{5}{24}b_4+\left(-\frac{11}{12}-\frac{5}{8}b_2+\frac{2}{3}b_3\right)\beta+$$

$$\left.+\left(\frac{43}{48}+\frac{1}{4}b_2\right)\beta^2-\frac{1}{3}\beta^3+\frac{1}{24}\beta^4\right\}\operatorname{sgn}x.$$

Доказательство. Ограничимся для краткости случаем $\nu=3$. Разложим величины, входящие в (9.60) по степеням ξ. Из (9.23) и (9.21) выводим, что

$$T(\xi)=-\left(b_1+\frac{1}{2}b_2\xi\right)\left(\xi+\ln(1+\xi)\right)+F\left(\ln(1+\xi)\right)+$$

$$+\xi F'\left(\ln(1+\xi)\right)=-\frac{1}{2}b_2\xi^2+\frac{1}{2}b_2\xi\ln(1+\xi)+$$

$$+\frac{1}{2}(b_2+b_3\xi)\ln^2(1+\xi)+\frac{1}{6}(b_3+b_4\xi)\ln^3(1+\xi)+$$

$$+\frac{1}{24}b_4\ln^4(1+\xi)+B|\xi|^5.$$

Разлагая $\ln(1+\xi)$ по степеням ξ, получаем, что

$$T(\xi)=\frac{1}{2}\,b_2\xi^2+\left(-\frac{1}{8}\,b_2+\frac{2}{3}\,b_3\right)\xi^3+$$
$$+\left(\frac{2}{3}\,b_2-\frac{5}{8}\,b_3+\frac{5}{24}\,b_4\right)\xi^4+B|\xi|^5.$$

Далее,

$$e^{T(\xi)}=1+T(\xi)+\frac{1}{2}\,T^2(\xi)+B\left|T^3(\xi)\right|=$$
$$=1+\frac{1}{2}\,b_2\xi^2+\left(-\frac{1}{8}\,b_2+\frac{2}{3}\,b_3\right)\xi^3+$$
$$+\left(\frac{2}{3}\,b_2+\frac{1}{8}\,b_2^2-\frac{5}{8}\,b_3+\frac{5}{24}\,b_4\right)\xi^4+B|\xi|^5. \quad (9.81)$$

Положим

$$g(u)=e^{\frac{1}{2}u^2}\,G(u).$$

В силу леммы 9.12 при $u<0$

$$g'(u)=ue^{\frac{1}{2}u^2}G(u)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{u^2\sqrt{2\pi}}+B\min(1,\ u^{-4}),$$

$$g''(u)=(u^2+1)\,e^{\frac{1}{2}u^2}\,G(u)+\frac{u}{\sqrt{2\pi}}=B\min(1,\ |u|^{-3}).$$

Так как

$$\zeta=\left(1+\frac{1}{2}\,\xi-\frac{1}{8}\,\xi^2+\frac{1}{16}\,\xi^3-\frac{5}{128}\,\xi^4+B|\xi|^5\right)\times$$
$$\times\left(\xi-\frac{1}{2}\,\xi^2+\frac{1}{3}\,\xi^3-\frac{1}{4}\,\xi^4+\frac{1}{5}\,\xi^5+B\xi^6\right)\sqrt{\ln\ln n}=$$
$$=x+\left(-\frac{1}{24}\,\xi^3+\frac{1}{24}\,\xi^4-\frac{71}{1920}\,\xi^5+B\xi^6\right)\sqrt{\ln\ln n},$$

то при $x<0$ $(0\leqslant\Theta\leqslant1)$

$$e^{\frac{1}{2}\zeta^2}G(\zeta)=g(x)+(\zeta-x)\,g'(x)+\frac{1}{2}\,(\zeta-x)^2\,g''\left(x+\Theta\,(\zeta-x)\right)=$$
$$=g(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi\ln\ln n}}\left(-\frac{1}{24}\,\xi+\frac{1}{24}\,\xi^2-\frac{71}{1920}\,\xi^3\right)+$$
$$+B\left\{\frac{\xi^4}{\sqrt{\ln\ln n}}+|\xi|^3\min(1,\ x^{-4})\sqrt{\ln\ln n}+\right.$$

$$+\xi^6 \min(1, |x|^{-3}) \Big\} = e^{\frac{1}{2}x^2} G(x) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi \ln\ln n}} \left(-\frac{1}{24}\xi + \frac{1}{24}\xi^2 - \frac{71}{1920}\xi^3\right) +$$

$$+B\left(\frac{\xi^4}{\sqrt{\ln\ln n}} + \frac{1}{\ln\ln n}\right). \qquad (9.82)$$

Совершенно аналогично при $x \geqslant 0$

$$e^{\frac{1}{2}\zeta^2}\left(1 - G(\zeta)\right) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(1 - G(x)\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi \ln\ln n}} \left(-\frac{1}{24}\xi + \frac{1}{24}\xi^2 - \frac{71}{1920}\xi^3\right) +$$

$$+B\left(\frac{\xi^4}{\sqrt{\ln\ln n}} + \frac{1}{\ln\ln n}\right). \qquad (9.83)$$

Согласно лемме 9.12

$$\Psi_1(x) = B\min(1, x^{-2}). \qquad (9.84)$$

Поэтому

$$\frac{\Psi_1(x)}{\sqrt{2\pi(1+\xi)\ln\ln n}} = \frac{\Psi_1(x)(1+B|\xi|)}{\sqrt{2\pi \ln\ln n}} = \frac{\Psi_1(x)}{\sqrt{2\pi\ln\ln n}} + \frac{B}{\ln\ln n}. \qquad (9.85)$$

Переходим к функции $\Psi_2(x)$. Разлагая $(1+\xi)^\beta$, $\ln^{-1}(1+\xi)$ и $(1+\xi)^{-\frac{1}{2}}$ по степеням ξ, имеем:

$$\frac{\Psi_2(x)}{\sqrt{1+\xi}} = \Big\{ -E(X) + \frac{1}{\xi} + \beta + \left(-\frac{\beta}{2}\right)\xi + \left(-\frac{\beta}{3}\right)\xi^2 + \left(-\frac{\beta}{4}\right)\xi^3 -$$

$$-\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\xi - \frac{1}{24}\xi^2 + \frac{19}{720}\xi^3 + B\xi^4 \Big\} \Big(1 - \frac{1}{2}\xi +$$

$$+\frac{3}{8}\xi^2 - \frac{5}{16}\xi^3 + B\xi^4\Big) \operatorname{sgn} x = S_1(\xi) \operatorname{sgn} x + B\xi^4, \qquad (9.86)$$

где

$$S_1(\xi) = -E(X) - \frac{1}{2} + \beta + \Big\{ -\frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{3} - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 \Big\}\xi +$$

$$+\Big\{ -\frac{3}{8}E(X) - \frac{13}{48} + \frac{23}{24}\beta - \frac{3}{4}\beta^2 + \frac{1}{6}\beta^3 \Big\}\xi^2 +$$

$$+\Big\{ \frac{5}{16}E(X) + \frac{29}{48} - \frac{11}{12}\beta + \frac{43}{48}\beta^2 - \frac{1}{3}\beta^3 + \frac{1}{24}\beta^4 \Big\}\xi^3. \qquad (9.87)$$

Из теоремы 9.3 и оценок (9.82), (9.83), (9.85), (9.86) получаем, что выражение (9.60) равно

$$e^{\{\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\}\ln\ln n+T(\xi)}\left\{e^{\frac{1}{2}x^2}G(-|x|)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Psi_1(x)+S_2(\xi)}{\sqrt{2\pi\ln\ln n}}+B\left(\frac{\xi^4}{\sqrt{\ln\ln n}}+\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right)\right\}, \tag{9.88}$$

где

$$S_2(\xi)=-\frac{1}{24}\xi+\frac{1}{24}\xi^2-\frac{71}{1920}\xi^3+S_1(\xi)\operatorname{sgn}x. \tag{9.89}$$

Согласно лемме 9.12 функция $e^{\frac{1}{2}x^2}G(-|x|)$ равна B или

$$\frac{\operatorname{sgn}x}{x\sqrt{2\pi}}+\frac{B}{|x|^3}\quad\text{при } |x|<1;$$

следовательно, согласно (9.81)

$$e^{T(\xi)+\frac{1}{2}x^2}G(-|x|)=e^{\frac{1}{2}x^2}G(-|x|)+$$

$$+\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{2\pi\ln\ln n}}\left\{\frac{1}{2}b_2\xi+\left(-\frac{1}{8}b_2+\frac{2}{3}b_3\right)\xi^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{3}b_2+\frac{1}{8}b_2^2-\frac{5}{8}b_3+\frac{5}{24}b_4\right)\xi^3\right\}+B\left(\frac{\xi^4}{\sqrt{\ln\ln n}}+\frac{1}{\ln\ln n}\right). \tag{9.90}$$

Согласно (9.81) и (9.84)

$$e^{T(\xi)}\Psi_1(x)=\Psi_1(x)+\frac{B}{\ln\ln n}. \tag{9.91}$$

Наконец, из (9.81), (9.87) и (9.89)

$$e^{T(\xi)}S_2(\xi)=\left\{-E(X)-\frac{1}{2}+\beta\right\}\operatorname{sgn}x+$$

$$+\left\{-\frac{1}{24}+\left(-\frac{1}{2}E(X)+\frac{1}{3}-\beta+\frac{1}{2}\beta^2\right)\operatorname{sgn}x\right\}\xi+$$

$$+\left\{\frac{1}{24}+\left(\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}b_2\right)E(X)-\frac{13}{48}-\frac{1}{4}b_2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{23}{24}+\frac{1}{2}b_2\right)\beta-\frac{3}{4}\beta^2+\frac{1}{6}\beta^3\right)\operatorname{sgn}x\right\}\xi^2+$$

$$+\left\{-\frac{71}{1920}+\left(\left(\frac{15}{16}+\frac{3}{8}b_2-\frac{2}{3}b_3\right)E(X)+\frac{29}{48}+\right.\right.$$

$$+\frac{11}{48}b_2-\frac{1}{3}b_3+\left(-\frac{11}{12}-\frac{5}{8}b_2+\frac{2}{3}b_3\right)\beta+$$

$$\left.\left.+\left(\frac{43}{48}+\frac{1}{4}b_2\right)\beta^2-\frac{1}{3}\beta^3+\frac{1}{24}\beta^4\right)\operatorname{sgn}x\right\}\xi^3+B\xi^4. \tag{9.92}$$

Подставляя в (9.88) оценки (9.90), (9.91) и (9.92), получаем теорему.

Теорема 9.5. *Пусть* $|x| < \varepsilon \sqrt{\ln\ln n}$, *где* ε — *фиксированное достаточно малое положительное число,*

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

Тогда имеем, что $\nu_n\{\omega(m) < \ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}\}$ *при* $x < 0$ *и* $\nu_n\{\omega(m) > \ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n}\}$ *при* $x > 0$ *равно*

$$e^{\{\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\}\ln\ln n+\frac{1}{2}x^2}\, G(-|x|)\left(1 + B\frac{|x|+1}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)$$

равномерно по $n > c_{79}$ *и* x.

Доказательство. Из теоремы 9.4 следует, что $\nu_n\{\omega(m) \gtrless \ln\ln n + b_1 + x\sqrt{\ln\ln n + b_2}\}$ при $x \gtrless 0$ соответственно равно

$$e^{\{\xi-(1+\xi)\ln(1+\xi)\}\ln\ln n}\left\{e^{\frac{1}{2}x^2}\, G(-|x|) + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}}\right\}.$$

Заменим здесь $\ln\ln n + b_1 + x\sqrt{\ln\ln n + b_2}$ через $\ln\ln n + y\sqrt{\ln\ln n}$. Имеем:

$$x = \left(y - \frac{b_1}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)\left(1 + \frac{b_2}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)^{-\frac{1}{2}} = y - \frac{b_1}{\sqrt{\ln\ln n}} + \frac{B|y|}{\ln\ln n}.$$

При $n > c_{79}$ и $|x| \geqslant \frac{1}{2}$ величины x и y имеют одинаковые знаки. Легко подсчитывается, что

$$\xi - (1+\xi)\ln(1+\xi) = \frac{y}{\sqrt{\ln\ln n}} - \left(1 + \frac{y}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{\ln\ln n}}\right) + \frac{B|y|}{(\ln\ln n)^{\frac{3}{2}}},$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2}\, G(-|x|) = e^{\frac{1}{2}y^2}\, G(-|y|) + \frac{B}{\sqrt{\ln\ln n}} = e^{\frac{1}{2}y^2}\, G(-|y|)\left(1 + \frac{B|y|}{\sqrt{\ln\ln n}}\right).$$

Отсюда следует теорема при $|y| \geqslant 1$. Её справедливость для $|y| < 1$ вытекает из теоремы 9.1.

Заключительные замечания. Мы подробно рассмотрели функцию $\omega(m)$. Однако изложенный здесь метод применим и к другим аддитивным арифметическим функциям $f(m)$, для которых можно доказать продолжимость функции $Z(s)$, определяемой рядом

$$Z(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{iuf(m)}}{m^s} = \prod_p \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{iuf(p^\alpha)}}{p^{\alpha s}},$$

хотя бы в область $\sigma \geqslant 1$. Так как

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{iuf(p^\alpha)}}{p^{\alpha s}} = 1 + \frac{e^{iuf(p)}}{p^s} + \frac{B}{p^{2\sigma}},$$

то достаточно доказать лишь продолжимость произведения

$$Z_1(s) = \prod_p \left(1 + \frac{e^{iuf(p)}}{p^s}\right).$$

Это, очевидно, можно сделать, если $f(p) = \text{const.}$ для всех простых чисел p, за исключением, быть может, множества простых чисел Q такого, что ряд

$$\sum_{p \in Q} \frac{1}{p}$$

сходится. Это можно сделать также, если при некотором целом положительном k существуют $\varphi(k)$, где $\varphi(k)$ — функция Эйлера, констант C_l, $1 \leqslant l \leqslant k$, $(l, k) = 1$, что если $p \equiv l \bmod k$, то $f(p) = C_l$, за исключением множества простых чисел Q такого, что ряд

$$\sum_{p \in Q} \frac{1}{p}$$

сходится. Возможны и другие случаи.

10. АДДИТИВНЫЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ГАУССОВОМ ПОЛЕ

Соображения, изложенные в предыдущем при рассмотрении распределения значений аддитивных функций, определенных на множестве натуральных чисел, пригодны и в случае аддитивных функций, определенных в любом алгебраическом числовом поле. Мы ограничимся рассмотрением поля гауссовых чисел. Результаты нетрудно распространяются на другие поля.

Условимся относительно некоторых обозначений. Через μ будем обозначать целые гауссовы числа, через ε — единицы поля $(\pm 1, \pm i)$, через $\mathfrak{p}$ — простые гауссовы числа. Наконец, $N(\mu)$ будет обозначать норму числа μ.

Вещественную или комплексную функцию $f(\mu)$, определенную на множестве всех целых гауссовых чисел, отличных от нуля, будем называть **аддитивной** арифметической функцией, если для любых взаимно простых μ_1, μ_2

$$f(\mu_1 \mu_2) = f(\mu_1) + f(\mu_2).$$

Так как $\varepsilon^5 = \varepsilon$, то

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon^5) = 5f(\varepsilon),$$

откуда имеем, что для любой единицы поля ε

$$f(\varepsilon) = 0;$$

следовательно, значения аддитивной функции для ассоциированных между собой целых чисел μ, $-\mu$, $i\mu$, $-i\mu$ $(\mu \neq 0)$ совпадают. Если каноническое разложение числа μ имеет вид

$$\varepsilon\, \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \ldots \mathfrak{p}_k^{\alpha_k},$$

то

$$f(\mu)=f(\mathfrak{p}_1^{\alpha_1})+\ldots+f(\mathfrak{p}_k^{\alpha_k}).$$

Если $f(\mathfrak{p}^\alpha)=f(\mathfrak{p})$ для всех $\mathfrak{p}$ и всех $\alpha=2, 3, \ldots$, то будем говорить, что функция $f(\mu)$ сильно аддитивна.

Переходим к рассмотрению распределения значений аддитивных функций. При этом аналогом отрезка натурального ряда $\{1, \ldots, n\}$ можно было бы считать множество всех целых гауссовых чисел, отличных от нуля, нормы которых не превосходят некоторой границы, и рассматривать распределение значений аддитивных функций на этом множестве. Однако законы, полученные для таких областей изменения аргумента, были бы по существу одномерными, в то время как распределение гауссовых чисел естественно рассматривать как распределение соответствующих им точек в комплексной плоскости. Поэтому мы будем рассматривать области изменения аргумента наших функций, состоящие из целых точек, принадлежащих некоторым областям довольно общего вида в комплексной плоскости.

Пусть $0\leqslant\varphi_1<\varphi_2\leqslant 2\pi$, $\chi(\varphi)$ – положительная функция, определенная на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$ и удовлетворяющая условию Липшица: для всяких $\varphi', \varphi''\in[\varphi_1, \varphi_2]$

$$|\chi(\varphi')-\chi(\varphi'')|\leqslant C|\varphi'-\varphi''|^\delta, \quad 0<\delta\leqslant 1,$$

C, δ – постоянные. Обозначим через W область в комплексной плоскости: $\varphi_1\leqslant\arg z<\varphi_2$, $0<|z|\leqslant\chi(\arg z)$, где z – комплексное переменное. Пусть W_ν – область, получаемая из W путем гомотетического расширения в ν раз относительно точки 0. Целые гауссовы числа, принадлежащие W_ν, и составляют ту область изменения аргумента аддитивной функции, которую мы будем рассматривать в дальнейшем при неограниченно возрастающем ν.

Заметим, что и в поле гауссовых чисел в большинстве случаев достаточно ограничиться рассмотрением лишь сильно аддитивных арифметических функций.

Введем теперь для вещественной функции $f(\mu)$ обозначение

$$B(\nu)=\left(\sum_{N(\mathfrak{p})\leqslant\nu}\frac{f^2(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично предыдущим параграфам будем говорить, что вещественная сильно аддитивная функция $f(\mu)$ принадлежит классу H, если $B(\nu)\to\infty$ при $\nu\to\infty$ и существует такая положительная неограниченно возрастающая функция $r=r(\nu)$, что

$$\frac{\ln r(\nu)}{\ln\nu}\to 0,\quad\frac{B(r(\nu))}{B(\nu)}\to 1.$$

В дальнейшем $M_\nu\{\ldots\}$ означает число целых гауссовых чисел, принадлежащих области W_ν и удовлетворяющих условиям, которые будут указываться в скобках; n_ν — число всех гауссовых чисел в W_ν, S — площадь области W,

$$A(\nu)=\sum_{N(\mathfrak{p})\leqslant\nu}\frac{f(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}.$$

Для функций класса H легко получаются аналоги предыдущих теорем. В качестве примера мы приведем лишь пару из них. Для доказательства их используются лемма 4.6, результаты А. Берри — К. Г. Эссена [38, 65], хорошо известные результаты о распределении простых гауссовых чисел, аналогичные приведенным в § 1, и следующие леммы.

Лемма 10.1. *Для* $\nu\geqslant 0$

$$n_\nu=S\nu^2+B\nu^{2-\delta}+B,$$

причем константа, ограничивающая B, *не меняется при повороте* W *вокруг точки* 0.

Доказательство. Для $0\leqslant\nu\leqslant\nu_0$ эта оценка тривиальна. Пусть $\nu>\nu_0$. Положим:

$$\varphi^{(k)}=\varphi_1+\frac{k}{[\nu]}(\varphi_2-\varphi_1)\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ [\nu]).$$

Пусть

$$\rho_k' = \inf_{\varphi^{(k-1)} \leqslant \varphi < \varphi^{(k)}} \chi(\varphi), \quad \rho_k'' = \sup_{\varphi^{(k-1)} \leqslant \varphi < \varphi^{(k)}} \chi(\varphi).$$

Из условия Липшица следует, что

$$\rho_k'' - \rho_k' = B\,(\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)})^{\delta} = B\,\nu^{-\delta}. \tag{10.1}$$

Число целых точек в области W_ν равно её площади $S\nu^2$ с точностью до площади объединения областей

$$\nu\rho_k' - 2 < |z| < \nu\rho_k'' + 2,$$

$$\varphi^{(k-1)} - \frac{2}{\nu\rho_k' - 2} < \arg z < \varphi^{(k)} + \frac{2}{z\rho_k' - 2}$$

и двух полос ширины 2 вдоль „боков“ области W_ν. Таким образом, учитывая (10.1), получаем, что

$$n_\nu - S\nu^2 \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{[\nu]} \left(\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)} + \frac{4}{\nu\rho_k' - 2}\right) \times$$

$$\times \left\{ (\nu\rho_k'' + 2)^2 - (\nu\rho_k' - 2)^2 \right\} + B\nu = B\,\nu^{2-\delta}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10.2. *Число целых гауссовых чисел, принадлежащих W_ν и делящихся на целое гауссово число $\beta \neq 0$, равно*

$$\frac{n_\nu}{N(\beta)} + B\left(\frac{\nu}{|\beta|}\right)^{2-\delta} + B,$$

причем оценка равномерна относительно $\nu \geqslant 0$ и $\beta \neq 0$.

Доказательство. Очевидно, что таких чисел будет столько, сколько имеется целых гауссовых чисел в области, которая получается из области $W_{\frac{\nu}{|\beta|}}$ путем поворота её на угол $-\arg\beta$. Из леммы 10.1 следует, что таких чисел имеется

$$\frac{S\nu^2}{N(\beta)} + B\left(\frac{\nu}{|\beta|}\right)^{2-\delta} + B,$$

или согласно той же лемме

$$\frac{1}{N(\beta)}\ (n_\nu + B\nu^{2-\delta} + B) + B\left(\frac{\nu}{|\beta|}\right)^{2-\delta} + B =$$

$$= \frac{n_\nu}{N(\beta)} + B\left(\frac{\nu}{|\beta|}\right)^{2-\delta} + B.$$

Лемма 10.3. *Если функция $r = r(\nu)$ удовлетворяет условиям: $r \geqslant 2$, $\ln r = o(\ln \nu)$ при $\nu \to \infty$; $\beta \neq 0$ — целое гауссово число, $N(\beta) < \nu^{\frac{1}{2}-\delta}$, то число целых гауссовых чисель, принадлежащих W_ν и делящихся на β, но не делящихся ни на одно из чисел $\beta\mathfrak{p}$ для $N(\mathfrak{p}) \leqslant r$, равно*

$$\frac{n_\nu}{N(\beta)} \prod_{N(\mathfrak{p}) \leqslant r}^{*} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \cdot \left(1 + B\exp\left(-c_{80}\frac{\ln \nu}{\ln r}\right)\right),$$

где * указывает, что из всех ассоциированных между собой простых чисел берется лишь одно. Оценка равномерна относительно β с $N(\beta) < \nu^{\frac{1}{2}-\delta}$.

Лемма 10.4. *Пусть $r \geqslant 2$, $u \geqslant 2$, $\{\beta\}$ — множество целых гауссовых чисел, канонические разложения которых содержат лишь простые числа, не превосходящие по норме r. Тогда число целых гауссовых чисел, принадлежащих W_ν и делящихся хотя бы на одно из чисел β с $N(\beta) \geqslant u$, не превосходит $c_{80}\nu^2 \exp\left(-c_{81}\frac{\ln u}{\ln r}\right)$, где c_{80}, c_{81} — константы, зависящие только от W.*

Лемма 10.5. *Для сильно аддитивной функции $f(\mu) \in H$*

$$\sum_{\mu \in W_\nu} \left\{ \sum_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mu \\ N(\mathfrak{p}) > r}} f(\mathfrak{p}) - \Big(A(\nu) - A(r)\Big) \right\}^2 = Bn_\nu \Big(B^2(\nu) - B^2(r)\Big).$$

Лемма 10.6. *Если $f(\mu)$ — вещественная сильно аддитивная арифметическая функция, удовлетворяющая условию $B(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$; $\lambda > 0$ — фиксированное число, то*

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu} \frac{f^2(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{1+\lambda}} = o\Big(B^2(\nu)\Big), \quad \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu} \frac{|f(\mathfrak{p})|}{N(\mathfrak{p}^2)} = o\Big(B(\nu)\Big).$$

Лемма 10.7. *Если вещественная сильно аддитивная арифметическая функция* $f(\mu) \in H$, *то*

$$\frac{1}{n_\nu} \sum_{\mu \in W_\nu} f^2(\mu) - \left(\frac{1}{n_\nu} \sum_{\mu \in W_\nu} f(\mu) \right)^2 = B^2(\nu) \, \big(1 + o(1)\big).$$

Из последней леммы, в частности, следует, что дисперсия закона распределения

$$\frac{1}{n_\nu} \, M_\nu \left\{ \frac{f(\mu) - A(\nu)}{B(\nu)} < x \right\}, \qquad (10.2)$$

где $f(\mu) \in H$, равна $1 + o(1)$.

Теорема 10.1. *Для того чтобы закон распределения* (10.2), *где вещественная сильно аддитивная арифметическая функция* $f(\mu) \in H$, *при* $\nu \to \infty$ *сходился к предельному с дисперсией* 1, *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция* $K(u)$ *с вариацией единица, что при* $\nu \to \infty$ *во всех точках непрерывности* $K(u)$

$$\frac{1}{B^2(\nu)} \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu \\ f(\mathfrak{p}) < u B(\nu)}} \frac{f^2(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} \to K(u).$$

Логарифм характеристической функции предельного закона вычисляется по формуле (4.9).

Класс предельных законов совпадает с классом K, *указанным в теореме* 4.3.

Теорема 10.2. *Если* $f(\mu)$ — *вещественная сильно аддитивная арифметическая функция, удовлетворяющая условиям*

$$B(\nu) \to \infty, \quad \frac{1}{B(\nu)} \max_{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu} |f(\mathfrak{p})| = \lambda_\nu \to 0$$

при $\nu \to \infty$, *то*

$$M_\nu \left\{ \frac{f(\mu) - A(\nu)}{B(\nu)} < x \right\} = S\nu^2 \, G(x) + B\nu^2 \lambda_\nu \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} \ln \frac{1}{\lambda_\nu} + 1 \right)$$

равномерно относительно x *и* $\nu > \nu_0$, *причем* ν_0 *не зависит от* x.

Доказательства лемм 10.3, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7 и теорем 10.1, 10.2 требуют лишь очевидных изменений по сравнению с доказательствами аналогичных лемм и теорем в области целых положительных чисел, поэтому мы не будем приводить их.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$\psi(\mu) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mu \\ 0 \leqslant \arg(\mathfrak{p}) < \frac{\pi}{2}}} \arg \mathfrak{p}.$$

Очевидно, что $\psi(\mu)$ – сильно аддитивная функция. Для её

$$A(\nu) = 4 \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu \\ 0 \leqslant \arg \mathfrak{p} < \frac{\pi}{2}}} \frac{\arg \mathfrak{p}}{N(\mathfrak{p})},$$

$$B^2(\nu) = 4 \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu \\ 0 \leqslant \arg \mathfrak{p} < \frac{\pi}{2}}} \frac{(\arg \mathfrak{p})^2}{N(\mathfrak{p})}.$$

Найдем для $A(\nu)$ и $B(\nu)$ асимптотические формулы. Для этого используем следующую оценку [13] (достаточна и менее точная формула):

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu \\ \varphi_1 \leqslant \arg \varphi < \varphi_2}} 1 = \frac{2}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\nu}{\ln \nu} + \frac{B\nu}{\ln^2 \nu},$$

справедливую при $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant 2\pi$. Полагая $n = [\sqrt{\ln \nu}]$, находим:

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu \\ 0 \leqslant \arg \mathfrak{p} < \frac{\pi}{2}}} \arg \mathfrak{p} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu \\ \frac{\pi}{2n}(k-1) \leqslant \arg \mathfrak{p} < \frac{\pi}{2n} k}} \arg \mathfrak{p} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\nu}{n \ln \nu} + \frac{B\nu}{\ln^2 \nu} \right) \left(\frac{\pi k}{2n} + \frac{B}{n} \right) =$$

$$= \frac{\pi\nu}{4 \ln \nu} + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln^3 \nu}}$$

и аналогично

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{p}) \leqslant \nu \\ 0 \leqslant \arg \mathfrak{p} < \frac{\pi}{2}}} (\arg \mathfrak{p})^2 = \frac{\pi^2 \nu}{12 \ln \nu} + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln^3 \nu}}.$$

Отсюда частным суммированием получаем, что

$$A(\nu)=\pi \ln\ln \nu+B,$$

$$B^2(\nu)=\frac{1}{3}\pi^2 \ln\ln \nu+B.$$

Из теоремы 10.2 после несложных подсчетов следует, что при $\nu>30$

$$M_\nu\left\{\frac{\psi(\mu)-\pi\ln\ln\nu}{\pi\sqrt{\frac{1}{3}\ln\ln\nu}}<x\right\}=S\nu^2 G(x)+$$

$$+\frac{B\nu^2}{\sqrt{\ln\ln\nu}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\ln\ln\ln\nu+B\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Барбан. Нормальный порядок аддитивных арифметических функций на множестве „сдвинутых" простых чисел. Acta mathem. Acad. sci. hung., 1961, **12**, 409—415.
2. М. Б. Барбан. Об одной теореме И. П. Кубилюса. Изв. АН УзССР, 1961, № 5, 3—9.
3. М. Б. Барбан. Арифметические функции на „редких" множествах. Докл. АН УзССР, 1961, № 8, 10—12.
4. М. Б. Барбан. Аналог закона больших чисел для аддитивных арифметических функций, заданных на множестве „сдвинутых" простых чисел. Докл. АН УзССР, 1961, № 12, 8—12.
5. М. Б. Барбан. Арифметические функции на „редких" множествах. Тр. ин-та матем. АН УзССР, 1961, вып. 22.
6. С. Н. Бернштейн. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. Успехи матем. наук, 1944, **10**, 65—114. Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. Math. Ann., 1926, **97**, 1—59.
7. А. А. Бухштаб. Об асимптотической оценке числа чисел арифметической прогрессии, не делящихся на „относительно" малые простые числа. Матем. сб., 1951, **28**, 165—184.
8. А. А. Бухштаб. Об одном аддитивном представлении целых чисел. Уч. зап. Московск. гос. пед. ин-та, 1953, **71**, 45—62.
9. Б. А. Бенков. Об одной монотонной функции. Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., 1949, **16 (111)**, 3—19.
10. Э. Вилкас. О нормальном распределении аддитивных арифметических функций. Уч. тр. Вильнюсского гос. ун-та 1957, **16**, 23—31; Тр. 3-й Студ. научно-техн. конференции Прибалтики и БССР, Рига, 1958, 3—7.
11. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.-Л., Гостехиздат, 1949.

12. А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. М.-Л., ОНТИ, 1936. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erg. Math., 1933, **2**, № 3.

13. Й. П. Кубилюс. О некоторых задачах геометрии простых чисел. Матем. сб. 1952, **31**, 507—542.

14. Й. П. Кубилюс. Об асимптотических законах распределения некоторых арифметических функций. Уч. тр. Вильнюсского ун-та, 1955, **4**, 45—59.

15. Й. П. Кубилюс. О распределении значений аддитивных арифметических функций. Докл. АН СССР, 1955, **100**, 623—626.

16. Й. П. Кубилюс. О применении теории суммирования случайных величин в теории аддитивных арифметических функций. Научн. тр. физ.-техн. ин-та АН Лит. ССР, 1955, **1**, 5—54.

17. Й. П. Кубилюс. Аналог теоремы А. Н. Колмогорова о марковских процессах в теории простых чисел. Докл. АН СССР, 1955, **103**, 361—363.

18. Й. П. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел. Вестн. Ленингр. ун-та, сер. мат. физ. хим., 1955, № 11, 59—60.

19. Й. П. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел. Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 31—66.

20. Й. П. Кубилюс. Об одном классе аддитивных арифметических функций, распределенных асимптотически по нормальному закону. Научн. тр. физ.-техн. ин-та АН Лит. ССР, 1956, 2, 5—15.

21. Й. П. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел. Вильнюс, Гос. издат. полит. и научн. лит., 1959.

22. Й. П. Кубилюс. О некоторых задачах вероятностной теории чисел. Тр. VI всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, Вильнюс, Гос. издат. полит. и научн. лит., 1962, 57—68.

23. Й. П. Кубилюс. Асимптотическое разложение законов распределения некоторых арифметических функций. Литовский матем. сборник, 1962, **2**, 61—73.

24. Ю. В. Линник. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Изд. Ленингр. унив., 1961.

25. М. Н. Марушин. Доказательство обобщенной основной леммы С. Н. Бернштейна для сумм почти независимых величин, удовлетворяющих условию Линдеберга. Докл. АН СССР, 1953, **98**, 21—24.

26. А. Г. Постников. Арифметическое моделирование случайных процессов. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1960, **57**.

27. Ю. В. Прохоров. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, 177—238.

28. Е. Л. Рвачёва. Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. Уч. зап. Львовского гос. ун-та, сер. мех.-матем., 1954, **29**, 5—44.
29. Н. А. Сапогов. Об одной предельной теореме. Докл. АН СССР, 1949, **69**, 15—18.
30. Н. А. Сапогов. О многомерной предельной теореме теории вероятностей. Успехи матем. наук, 1950, **5**, № 3, 137—151.
31. Н. А. Сапогов. Закон повторного логарифма для сумм зависимых величин. Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, сер. матем. 1950, **19** (**137**), 160—179.
32. О. В. Сарманов. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на сумму почти независимых величин, удовлетворяющих условию Линдеберга. Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, **11** 569—575.
33. Р. В. Уждавинис. О распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Тр. АН Лит. ССР сер. Б, 1959, № 2 (18), 9—29.
34. Р. В. Уждавинис. О совместном распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Тр. АН Лит. ССР, сер. Б, 1960, № 1 (21), 5—29.
35. А. Я. Хинчин. Асимптотические законы теории вероятностей. М.-Л., ОНТИ, 1936. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erg. Math., 1933, 2, № 4.
36. Н. А. Шапин. О подмножествах натурального ряда. Матем. сб., 1952, 31, 367—380.
37. F. Behrend. Über numeri abundantes, I, II. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1932, 322—328, 1933, 280—293.
38. A. C. Berry. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc., 1941, **49**, 122—136.
39. V. Brun. Le crible d'Eratosthene et le théorème de Goldbach. Skrifter utgit av Videnskaps-selskapet i Kristiania mat.-naturv. Kl. 1920, **3**, 1—36.
40. H. Bühlmann. Sur l'indépendance asymptotique des variables aléatoires liées. C. r. Acad. sci., 1957, **245**, 490—493.
41. J. W. S. Cassels. An introduction to Diophantine approximation. Cambridge University Press, 1957. Введение в теорию диофантовых приближений. М., Издат. иностр. лит., 1961.
42. H. Cramér. Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. Actual. sci. et ind., **736**, Paris, 1938. Об одной предельной теореме теории вероятностей. Успехи матем. наук, 1944, **10**, 166—178.

43. H. Cramér, H. Wold. Some theorems on distribution functions. J. London Math. Soc., 1936, **11**, 290–294.
44. H. Davenport. Über numeri abundantes. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1933, **27**, 830–837.
45. H. Delange. Sur le nombre des diviseurs premiers de *n*. C. r. Acad. sci., 1953, **237**, 542–544.
46. H. Delange. Sur un théorème d' Erdös et Kac. Acad. roy. Belg. Bull., cl. sci. (5), 1956, **42**, 130–144.
47. H. Delange. Sur les fonctions arithmétiques fortement additives. C. r. Acad. sci., 1957, **244**, 1307–1309.
48. H. Delange. Sur les fonctions arithmétiques fortement additives. C. r. Acad. sci., 1957, **244**, 1604–1606.
49. H. Delange. Sur les fonctions arithmétiques fortement additives. C. r. Acad. sci., 1957, **244**, 2122–2124.
50. H. Delange. On a theorem of Erdös. Scripta math., 1958, **23**, 109–116.
51. H. Delange. Sur des formules dues à Atle Selberg. Bull. sci. math., 1959, **83**, 101–111.
52. H. Delange, H. Halberstam. A note on additive functions. Pacif. J. math., 1957, **7**, 1551–1556.
53. P. Erdös. On the density of some sequences of numbers, I, II III. J. London Math. Soc., 1935, **10** 120–125, 1937, **12**, 7–11, 1938, **13**, 119–127.
54. P. Erdös. On a problem of Chowla and some related problems Proc. Cambridge Philos. Soc., 1936, **32**, 530–540.
55. P. Erdös. Note on the number of prime divisors of integers. J. London Math. Soc., 1937, **12**, 308–314.
56. P. Erdös. On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions. Amer. J. Math., 1939, **61**, 722–725.
57. P. Erdös. On the distribution of additive functions. Ann. Math., 1946, **47**, 1–20.
58. P. Erdös. Some remarks about additive and multiplicative functions. Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, 527–537.
59. P. Erdös. Some remarks and corrections to one of my papers. Bull. Amer. Math. Soc., 1947, **53**, 761–763.
60. P. Erdös. On additive arithmetical function and applications of probability to number theory. Proc. Internat. Congr. Math., 1954, vol. **3**. Groningen-Amsterdam, 1956, 13–19.
61. P. Erdös. On the distribution function of additive arithmetical functions and some related problems. Rend. Sem. mat. fis. Milano, 1958, **27**, 45–49.

62. P. Erdős, M. Kac. The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 1939, **25**, 206–207.

63. P. Erdős, M. Kac. The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions. Amer. J. Math. 1940 **62**, 738–742.

64. P. Erdős, A. Wintner. Additive arithmetical functions and statistical independence. Amer. J. Math., 1939, **61**, 713–721.

65. C.-G. Esseen. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta math., 1945, **77**, 1–125.

66. B. Grigelionis. Multiplikatyvinių aritmetinių funkcijų pasiskirstymo klausimu. Vilniaus univ. mokslo darbai, matem., fiz. ser., 1960, **9**, 71–73.

67. H. Halberstam. On the distribution of additive number-theoretic functions, I, II, III. J. London Math. Soc., 1955, **30** 43–53, 1956, **31**, 1–14, 14–27.

68. H. Halberstam. Über additive zahlentheoretische Funktionen J. reine und angew. Math., 1955, **195**, 210–214.

69. G. H. Hardy, S. Ramanujan. The normal number of prime factors of a number n. Quart. J. pure and applied Math., 1917, **48**, 76–92.

70. P. Hartman, A. Wintner. On the standard deviations of additive arithmetical functions. Amer. J. Math., 1940, 62, 743–752.

71. M. Kac. Note on the distribution of values of the arithmetic function $d(m)$. Bull. Amer. Math. Soc., 1941, **47**, 815–817.

72. M. Kac. Probability methods in some problems of analysis and number theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 641–665.

73. M. Kac. A remark on the preceding paper by A. Rényi. Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 163–165.

74. M. Kac. Statistical independendence in probability, analysis and number theory. Math. Association of America, 1959.

75. M. Kac. Probability and related topics in physical sciences. Intersciene Publish., London, 1959.

76. L. Kubik. The limiting distributions of cumulative sums of independent two-valued random variables. Studia math., 1959, **18**, 295–309.

77. W. J. LeVeque. On the size of certain number-theoretic functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **66**, 440–463.

78. P. Lévy. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris. Gauthier-Villars, 1937.

79. Loève. Étude asymptotique des sommes des variables aléatoires liées. J. math. pures et appl., 1945, **24**, 249–318.

80. M. Loève. On sets of probability laws and their limit elements. Univ. California, Publ. in statistics, Berkeley, 1950.
81. H. Ostmann. Additive Zahlentheorie. II. Erg. Math., № 11, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1956.
82. K. Prachar. Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy und Ramanujan auf algebraische Zahlkörper. Monatsh. Math., 1952, **56**, 229–232.
83. H. Rademacher. Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg 1923, **3**, 12–30.
84. A. Rényi. On the density of certain sequences of integers Publs. Inst. Math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 157–162.
85. A. Rényi. Probabilistic methods in number theory. Proc. of the Internat. Congress of Mathem., Edinburgh 1958. Cambridge. University Press, 1960, 529–539.
86. A. Rényi, P. Turán. On a theorem of Erdös-Kac. Acta arithm., 1958, **4**, 71–84.
87. G. J. Rieger. Zur Statistik der Primfaktoren der natürlichen Zahlen in arithmetischen Progressionen. Journ. reine und angew. Math., 1961, 206, 26–30.
88. I. J. Schoenberg. On asymptotic distribution of arithmetical functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **39**, 315–330.
89. A. Selberg. On an elementary method in the theory of primes. Norske Vid. Selsk. Forth. Trondhjem, 1947, **19**, 64–67.
90. A. Selberg. Note on a paper by L. G. Sathe. Journ. Indian Math. Soc., 1954, **18** 83–87.
91. H. N. Shapiro. Distribution functions of additive arithmetic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, 426–430.
92. M. Tanaka. On the number of prime factors of integers, I, II, III, IV. Japan. J. Math., 1955, 25, 1–20; J. Math. Soc. Japan, 1957, 9, 171–191; Japan. J. Math., 1958, **27**, 103–127; 1960, **30**, 55–83.
93. P. Turán. On a theorem of Hardy and Ramanujan. J. London Math. Soc. 1934, 9, 274–276.
94. P. Turán. Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan. J. London Math. Soc., 1936, **11**, 125–133.
95. H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Ann., 1916, **77**, 313–352.

ОГЛАВЛЕНИЕ